

О конъюнкции в групповых грамматиках

Научный руководитель – Пентус Мати Рейнович

Пшеницын Тихон Григорьевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: ptihon@yandex.ru

Работа, проведённая нами, продолжает исследование, представленное на конференции “Ломоносов” в 2019 году, и посвящена расширениям групповых грамматик, в первую очередь, свободным группам с конъюнкцией. Мы исследуем свойства групповых грамматик с конъюнкцией как с точки зрения порождающей силы (описан класс языков, задаваемых ими), так и с точки зрения алгоритмической сложности.

Зафиксируем счётное множество примитивных элементов Pr и рассмотрим свободную группу FG , порождённую этими элементами. Определим множество FG_{\wedge} типов: $FG_{\wedge} := FG | FG_{\wedge} \wedge FG_{\wedge}$. Секвенция — это конструкция вида $A_1, \dots, A_n \rightarrow A$, где A_i, A — элементы FG_{\wedge} . Рассмотрим секвенциальное исчисление \mathcal{FG}_{\wedge} , задаваемое следующими аксиомой и правилами:

1) Аксиома: $A_1, \dots, A_n \rightarrow A, \quad A_i, A \in FG, \quad A_1 \dots A_n = A.$

2) Правила $(\wedge_i \rightarrow), i = 1, 2$ и $(\rightarrow \wedge)$:
$$\frac{\Gamma, A_i, \Delta \rightarrow B}{\Gamma, A_1 \wedge A_2, \Delta \rightarrow B} \quad \frac{\Gamma \rightarrow A_1 \quad \Gamma \rightarrow A_2}{\Gamma \rightarrow A_1 \wedge A_2}$$

Групповая грамматика с конъюнкцией (далее GG_{\wedge}) — это тройка $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$, где Σ — конечный алфавит, $H \in GG_{\wedge}, \triangleright \subseteq \Sigma \times GG_{\wedge}$ — конечное бинарное отношение. По определению, такая грамматика задает язык

$$\{a_1 \dots a_n \in \Sigma^+ : \exists T_1, \dots, T_n \in FG_{\wedge} : a_i \triangleright T_i, \mathcal{FG}_{\wedge} \vdash T_1, \dots, T_n \rightarrow H\}.$$

Определим ICFL — класс конечных пересечений контекстно-свободных языков; NICFL — класс символьных гомоморфизмов языков из ICFL.

Основные результаты работы — следующие теоремы:

Теорема 1. Класс языков, задаваемых групповыми грамматиками с конъюнкцией, равен NICFL.

Поскольку несложно показать, что первый из классов замкнут относительно конъюнкции, имеет место

Следствие. Класс NICFL замкнут относительно конъюнкции.

Доказательство Теоремы 1 проводится в более общем случае для произвольных формальных систем, которые расширяются с помощью конъюнкции.

В отношении алгоритмической сложности нами доказана

Теорема 2. Проверка выводимости в \mathcal{FG}_{\wedge} NP-полна.

Доказательство состоит в прямолинейном сведении к данной задаче задачи SAT.

Наконец, будут представлены утверждения, объясняющие, как расширение свободной группы с помощью конъюнкции (и дизъюнкции) связано с исчислением Ламбека с конъюнкцией; конкретно, будут рассмотрены интерпретации из последнего в первое.