Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

О линейной независимости радикалов из натуральных чисел

Научный руководитель – Канель-Белов Алексей Яковлевич

Воробьев Иван Евгеньевич
Студент (бакалавр)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Факультет математики, Москва, Россия
E-mail: ievorobev@edu.hse.ru

При изучении алгебры естественным образом возникают радикалы из целых чисел. Встает вопрос о соотношениях между ними. Имеются тривиальные соотношения, типа $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$ и т. п.
При этом возникает вопрос о линейной независимости радикалов (кроме тривиальных соотношений). Однако также возникают эффекты, связанные с комплексными корнями из единицы. Например, $\sqrt[2]{-3}$ выражается через $\sqrt[3]{2}$. Чтобы их исключить, ограничимся только вещественными значениями радикалов.
Простейшим фактом такого рода является: квадратные корни из натуральных чисел, свободных от квадратов, линейно независимы над полем рациональных чисел.
Автору удалось получить альтернативное доказательсво следующего результата:
$\sqrt[m_1]{n_1}, \sqrt[m_2]{n_2}, \ldots, \sqrt[m_k]{n_k}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, если каждый радикал $\sqrt[m_i]{n_i}$ нельзя сократить (то есть n_i не является точной l-ой степенью, где l – делитель m_i) и если каждое n_i свободно от m_i-ых степеней.

План доказательства:

Сначала докажем это утверждение для $m_1 = \ldots = m_k = p$, где p – произвольное простое число.
В этом случае будем доказывать линейную независимость над $\mathbb{Q}(exp((2\pi i)/p))$, чтобы все расширения были нормальными. Мы будем расширять это поле последовательно на корни p-ой степени из простых чисел.

Далее все сведем к лемме (заметив, что в $\mathbb{Q}(exp((2\pi i)/p))$ не содержится иррациональных корней p-ой степени из натуральных чисел):

Пусть $\mathbb{F}$ – любое поле характеристики 0. n, k - его элементы, не являющиеся m-ыми степенями. Тогда если $\mathbb{F}(\sqrt[m]{n}) \supseteq \mathbb{F}(\sqrt[m]{k})$ и расширения нормальны, то $\sqrt[m]{k} = \alpha \sqrt[m]{n^l}$, для некоторого $\alpha \in \mathbb{F}$ и $l < m$.

Лемма доказывается следующим образом: пусть a, b – степени расширений $\mathbb{F}(\sqrt[m]{n})$ и $\mathbb{F}(\sqrt[m]{k})$.

Запишем k в базисе $\{1, n, n^2, \ldots, n^{b-1}\}$.
Из теории Галуа мы знаем, что у $\mathbb{F}(\sqrt[m]{n})$ есть ровно a автоморфизмов.
Применим их к записанному равенству и получим нечто очень похожее на матрицу Вандермонда.
Из этого получим требуемое.

Далее докажем тот же факт, только вместо p положим уже произвольное нечетное число r.
Для этого нам будет достаточно доказать, что в $\mathbb{Q}(exp((2\pi i)/r))$ нет иррациональных корней больше чем второй степени степени из натуральных чисел, так как остальная часть доказательства дословно переносится на этот случай.
Этот факт мы покажем, заметив, что $\mathbb{Q}(exp((2\pi i)/r))$ абелево расширение, а в случае если в нем есть корень больше чем второй степени из натурального числа, в нем есть не абелево над $\mathbb{Q}$ подполе, что противоречит основной теореме теории Галуа.

Наконец, докажем факт, где вместо p стоит любое натуральное число s.
Доказывается это техническим обобщением предыдущего утверждения. То есть мы сначала понимаем сколько квадратных корней содержится в $\mathbb{Q}(exp((2\pi i)/s))$, точнее какую степень имеет подполе, образованное ими, а далее показываем, что если $\mathbb{Q}$ расширить на $exp((2\pi i)/s)$, а затем в правильном порядке расширять на корни из простых, то мы получим нужную степень расширения.

Утверждение с различными m_i является естественным обобщением последнего факта.