Секция «Вычислительная математика, математическое моделирование и численные методы»

О решении задачи оптимального управления в модели Мэнкью — Ромера — Уэйла

Научный руководитель – Григорьев Илья Сергеевич

Голубев Игорь Игоревич
Студент (магистр)
Бакинский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, Факультет прикладной математики, Баку, Азербайджан
E-mail: alexvenger456@gmail.com

В работе рассматривается задача максимизации функционала, выражающего интегральную дисконтированную полезность потребления в модели Мэнкью — Ромера — Уэйла [1]. Производственная функция $Y = K^{\alpha}H^{\beta}L^{\gamma}$ зависит от трёх фазовых переменных задачи: физического капитала K, человеческого капитала H и труда L; величины коэффициентов эластичности считаются заданными константами $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$. Процентная ставка δ, нормы выбытия капиталов δ_K, δ_H и коэффициент роста населения n — параметры задачи. Нормы сбережений капиталов u_K, u_H — управления.

Математически рассматриваемая задача формализуется как задача оптимального управления:

$$\int\limits_0^{100} (1 - u_K - u_H) Y e^{-\delta t} dt \to \max_{u_K, u_H};$$

$$u_K \geq 0,\ u_H \geq 0,\ u_K + u_H \leq 1;$$

$$\begin{cases} \dot{K} = u_K Y - \delta_K K, \\ \dot{H} = u_H Y - \delta_H H, \\ \dot{L} = nL, \\ K(0) = H(0) = L(0) = 1. \end{cases}$$

Исследование задачи проводится на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина. В задаче потенциально возможны различные варианты режимов особого управления — для них выполняются условия оптимальности Келли [2].

Краевая задача принципа максимума решается численно методом стрельбы [3]. Входящая составной частью в метод стрельбы задача Коши решается методом Дормана-Принса 8(7) [4], система нелинейных уравнений для вектор-функции невязок решается модифицированным методом Ньютона-Исаева-Сонина-Федоренко [5]. Основной вычислительной трудностью решения задачи оказалось построение эффективной вычислительной схемы метода стрельбы — её удалось сформировать на основе схемы интегрирования в обратном времени.

Источники и литература

1) Mankiw G., Romer D., Weil D. Contribution to the Empirics of Economic Growth — The Quarterly Journal of Economics. — 1992. — May (vol. 107, № 2). — P. 407—437.

2) Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1973, 256 с.

3) Григорьев И. С. Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления — М.: Изд-во Центра прикладных иссл-ий при мех.-мат. факультете МГУ, 2005, — 150 с.

4) Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи — М.: Мир, 1990. — 512 с.

5) Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику: Учеб. пособие: Для вузов. — М.: Изд-во МФТИ, 1994 — 528 с.