Секция «Геометрия и топология»

Действия групп, момент-угол-многообразия и минимумы норм

Научный руководитель – Панов Тарас Евгеньевич

Струментов Максим Андреевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва,
Россия
E-mail: strumentov.maksim@gmail.com

1. Предмет исследования

Пусть $V \cong \mathbb{R}^k$ - есть k-мерное векторное вещественное пространство, и $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ последовательность (*конфигурация*) m векторов в двойственном пространстве V^*. Предполагаем, что их выпуклая оболочка порождает все пространство V^*. Рассмотрим действие V на $\mathbb{R}^m$ заданное следующим образом.

$$\begin{aligned} V \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) &\mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} = \left(e^{\langle \gamma_1, \boldsymbol{v} \rangle} x_1, \dots, e^{\langle \gamma_m, \boldsymbol{v} \rangle} x_m\right). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Это пример динамической системы, восходящей к работам Пуанкаре. Есть связь между линейными свойствами набора векторов Γ и топологией слоения $\mathbb{R}^m$ на орбиты действия (1.1) (*пространством листов*). В работе будут описана связь комбинаторной структуры Γ и топологией пространства листов.

2. Определения

Симплициальный комплекс на $[m]$ это набор $\mathcal{K}$ подмножеств $[m]$ т.ч. для каждого $I \in \mathcal{K}$ все подмножества I также принадлежат $\mathcal{K}$.

Многообразие $U(\mathcal{K})$ в $\mathbb{R}^m$, соответствующее симплициальному комплексу $\mathcal{K}$:

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\dots,i_p\} \notin \mathcal{K}} \{\boldsymbol{x} \colon x_{i_1} = \dots = x_{i_p} = 0\}. \tag{2.1}$$

Двойственным по Гейлу к конфигурации Γ называется такой набор векторов $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$, что $\Gamma\mathrm{A}^* = 0$. В матричном виде это означает, что строки матрицы A есть линейные зависимости между векторами-столбцами в Γ.

Диаграммой Гейла к конфигурации A называется такой набор векторов $\mathrm{G} = \{\boldsymbol{g}_1, \dots, \boldsymbol{g}_m\}$, что $G\mathrm{A}^* = 0$. И при этом $\sum\limits_{i=1}^{m} \boldsymbol{g}_i = 0$.

Конусом σ на векторах $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_p$ в линейном вещественном пространстве L называется подмножество, образованное всеми неотрицательными линейными комбинациями этого набора векторов.

$$\sigma = \operatorname{cone}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_p) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \ \lambda_i \geq 0$$

Веером называется конечный набор конусов $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ в L такой, что каждая грань конуса из Σ лежит в Σ, и пересечение любых двух конусов лежит в Σ. То есть это совокупность набора векторов $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$, и симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на $[m]$.

Нормальным веером простого многогранника называется веер, набор образующий которого есть набор векторов-нормалей к граням, симплициальным комплексом - граница двойственного многогранника.

Момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, определеннный симплициальным комплексом $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^2, S^1)^I.$$

Момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_P$, определенное многогранником P как решение системы k уравнений:

$$\mathcal{Z}_P = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m : \sum_{i=1}^{m} \gamma_i |z_i|^2 = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i b_i\}$$

Которые так же можно задать в виде:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m |z_i|^2 = 1, \\ \sum_{i=1}^m \boldsymbol{g}_i |z_i|^2 = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{2.2}$$

Момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_P$ как решение системы k уравнений:

$$\mathcal{Z}_P = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m : \sum_{i=1}^{m} \gamma_i |z_i|^2 = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i b_i\}$$

Конфигурация G со следующими свойствами называется:

(a) $\boldsymbol{0} \in conv(G)$

(b) Если $\boldsymbol{0} \in conv(G_I)$ то $|I| \geq m - n$
Называется *допустимой*

(c) $\sum_{i=1}^m \boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{0}$
Называется *допустимой и центрированной*

Многообразие $\mathcal{Z}(p)$ определим как решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} ||z||_p = 1, \\ \sum_{i=1}^m \boldsymbol{g}_i |z_i|^p = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{2.3}$$

3. Результаты

Теорема 1. *Многообразие $U(\mathcal{K})/V$ компактно тогда и только тогда, когда веер Σ полный.*

Теорема 2. *Если $\{\mathcal{K}, \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ определяет полный симплициальный конус, имеет место гомеоморфизм*

$$U(\mathcal{K})/V \cong \mathcal{R}_{\mathcal{K}}.$$

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{K}$ симплициальный комплекс на множестве $[m]$, соответствующий границе некоторого симплициального многогранника. Набор векторов $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ таков, что для каждого симплекса $I \in \mathcal{K}$ подмножество A_I линейно независимо. Положим $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ двойственный по Гейлу набор векторов. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) Набор $\{\mathcal{K}, \mathrm{A}\}$ задает нормальный веер Σ некоторого многогранника;

(b) $\bigcap_{I \in \mathcal{K}} \operatorname{relint} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}} \neq \varnothing$.

Так же будет показана связь действий с минимумами норм

Теорема 4. *В определенных выше терминах:*

(a) Если конфигурация G - допустима, то ограничение отображения имеет место гомеоморфизм $\mathcal{Z}(p) \to \mathcal{Z}(2)$.

(b) Если конфигурация G - допустима и ценирирована, то имеет место гомеоморфизм отображение $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to \mathcal{Z}_P$.

4. Благодарности

Хочу выразить благодарность Тарасу Евгеньевичу Панову за помощь в написании работы.

Список литературы

[ADHL] Arzhantsev, Ivan; Derenthal, Ulrich; Hausen, Jürgen; Laface, Antonio. *Cox rings.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 144. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[BP1] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Torus actions, combinatorial topology and homological algebra.* Uspekhi Mat. Nauk **55** (2000), no. 5, 3–106 (Russian). Russian Math. Surveys **55** (2000), no. 5, 825–921 (English).

[BP2] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[C] Cai, Li. *Norm minima in certain Siegel leaves.* Algebr. Geom. Topol. 15 (2015), no. 1, 445–466.

[CLS] Cox, David A.; Little John B.; Schenck, Henry K. *Toric varieties.* Graduate Studies in Mathematics, 124. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[F] Fulton, William. *Introduction to Toric Varieties.* Annals of Mathematics Studies, 131. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[I] Ishida, Hiroaki. *Complex manifolds with maximal torus actions.* Preprint (2013), arXiv:1302.0633.

[IFM] Ishida, Hiroaki; Fukukawa, Yukiko; Masuda, Mikiya. *Topological toric manifolds.* Mosc. Math. J. 13 (2013), no. 1, 57–98.

[L] Lee, John M. *Introduction to smooth manifolds.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013.

[PU] Panov, Taras; Ustinovsky, Yuri. *Complex-analytic structures on moment-angle manifolds.* Moscow Math. J. **12** (2012), no. 1, 149–172.

[CKP] Cesar Camaco, Nicolaas H. Kuioer, Jacob Palis *The topology of holomorphic flows with singularity.* Publications mathematiques de l'I.H.E.S., tome 48 (1978), p. 5-38.