Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Инволюции полной линейной группы порядка 2 над кольцом без кручения ранга 1

Научный руководитель – Тимошенко Егор Александрович

Гайдак Виолетта Александровна

Аспирант

Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Механико-математический факультет, Томск, Россия

E-mail: stef.germ94@mail.ru

Одним из важнейших классов абелевых групп являются вполне разложимые группы. Работы Вильданова [1, 2] были посвящены вопросам определяемости вполне разложимой группы конечного ранга её группой автоморфизмов. Большинство полученных в этих работах результатов доказано в предположении, что рассматриваемые вполне разложимые группы 2-делимы. Первым шагом к снятию требования 2-делимости является получение критерия сопряжённости инволюций группы GL_2 над подкольцами поля $\mathbb{Q}$.

Как обычно, обозначаем через $GL_2(R)$ группу обратимых (2×2)-матриц с элементами из R (здесь и далее R есть подкольцо поля $\mathbb{Q}$). Ясно, что множество $ML_2(R) \subset GL_2(R)$ всех матриц с определителем ± 1 является подгруппой в $GL_2(R)$. Непосредственно проверяется, что множество всех нецентральных инволюций каждой из групп $GL_2(R)$ и $ML_2(R)$ совпадает с множеством матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad \text{где } a, b, c \in R \text{ и } a^2 + bc = 1. \tag{1}$$

Для инволюций $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ введём обозначения J и I соответственно.

Теорема 1. *Для инволюции A вида (1) эквивалентны условия*:
1) *матрицы A и J сопряжены в $GL_2(R)$*;
2) *матрицы A и J сопряжены в $ML_2(R)$*;
3) $b, c \in 2R$.

Отсюда, в частности, следует, что в группах $ML_2(R)$ и $GL_2(R)$ все нецентральные инволюции сопряжены между собой, если выполнено $2R = R$. Справедлива также

Теорема 2. *Пусть $2R \neq R$. Для инволюции A вида (1) эквивалентны условия*:
1) *матрицы A и I сопряжены в $GL_2(R)$*;
2) *матрицы A и I сопряжены в $ML_2(R)$*;
3) *$b \notin 2R$ или $c \notin 2R$.*

Таким образом, если $2R \neq R$, то всякая нецентральная инволюция с элементами из R сопряжена в $GL_2(R)$ и в $ML_2(R)$ ровно с одной из инволюций J и I.

Теорема 3. *Если C и D – инволюции группы $GL_2(R)$ и $CD = -DC$, то найдётся внутренний автоморфизм этой группы, переводящий множество $\{C, D\}$ в $\{J, I\}$.*

Утверждение теоремы 3 перестанет быть верным, если заменить в нём группу $GL_2(R)$ её подгруппой $ML_2(R)$: можно указать подкольцо R поля $\mathbb{Q}$ и антикоммутирующие инволюции C и D из $ML_2(R)$, для которых не существует внутреннего автоморфизма группы $ML_2(R)$, переводящего $\{C, D\}$ в $\{J, I\}$.