Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

О задаче А-полноты в классе линейных автоматов над кольцом двоично-рациональных чисел

Научный руководитель – Часовских Анатолий Александрович

Ронжин Дмитрий Владимирович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: d_rongin@mail.ru

Рассматривается кольцо двоично-рациональных чисел, которое является подкольцом в поле рациональных чисел:

$$\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}} = \left\{\tfrac{m}{2^n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\},$$

$\forall l, k \in \mathbb{N}$ будем рассматривать конечные автоматы[1] над $\mathbb{Q}^l_{\frac{m}{2^n}}$, функции переходов и выходов являются линейными[2, 3] - обозначим такие автоматы $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$. Некоторые результаты о надклассе $L(\mathbb{Q})$ были получены в работе [4]. Рассматривается задача A-полноты[5] системы линейных автоматов в $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$.
Аналогично [4] определяется множество формальных степенных рядов над $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$ и операции над ними, а также ряд вспомогательных обозначений.В работе [6] описывается представление $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ как преобразователей элементов $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$, а так же формулируются следующие множества (кратность понимаем в смысле кратности числителя):

1) $V_{\mathbf{P}} = \{V \ | V \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), V-$ обладает $\mathbf{P}$ - свойством $\}$
2) $D = \{V \ | V \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), V-$ обладает $\mathbf{D}$ - свойством $\}$
3) $\forall p > 2$ - простого, $M_p = \{V(x_1, .., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}) | V(x_1, .., x_l) = R_0(\xi) + \sum_{i=1}^{l} R_i(\xi) \cdot x_i, R_i(1) \vdots p, \forall i \in [1, l]\}$
4) $\forall p > 2$, -простого, $T_p = \{V(x_1, .., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}) | V(x_1, .., x_l) = R_0(\xi) + \sum_{i=1}^{l} R_i(\xi) \cdot x_i, R_0(0) \vdots p\}$
5) $T_{int} = \{V(x_1, .., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}) | V(x_1, .., x_l) = R_0(\xi) + \sum_{i=1}^{l} R_i(\xi) \cdot x_i, R_i(0) \in \mathbb{Z}, \forall i \in [1, l]\}$
6) $T_{\geq 0} = \{V(x_1, .., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}) | V(x_1, .., x_l) = R_0(\xi) + \sum_{i=1}^{l} R_i(\xi) \cdot x_i, R_i(0) \geq 0, \forall i \in [1, l]\}$

Множество линейных автоматов из $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ арности ≤ 1 обозначим V^1.

Лемма 1.
$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \boldsymbol{P} = \{p_i | p_i \neq 2$ - простое число, $i \in [1, k]\}$, $\forall$ простого $p > 2$, верно что: $V_{\boldsymbol{P}}$, D, M_p, T_p, T_{int}, $T_{\geq 0}$ — А-предполные классы.

Теорема 1. *Пусть $M \subset L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ - конечная система.Если $M \not\subseteq D$ и $\forall \boldsymbol{P}$ - конечного подмножества простых чисел, не содержащего двойку $M \not\subseteq V_{\boldsymbol{P}}$, то $A(M \cup V^1) = L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$.*

Теорема 2. *Пусть $M \subset L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ - конечная система. Если $\forall p > 2$ - простого, выполняется:*

$$M \not\subseteq T_p, M_p, T_{int}, T_{\geq 0},$$

то $A(M \cup \{V_{\bigoplus}(x, y)\}) = L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$.

Источники и литература

1) Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., Введение в теорию автоматов, НАУКА, Москва, 1985, 320 с.
2) Часовских А.А., "Проблема полноты для класса линейно-автоматных функций", Дискретная математика, 27:2 (2015), 134-151
3) Chasovskikh A.A., "Completeness problem for the class of linear automata functions", Discrete Mathematics and Applications, 26:2 (2016), 89-104
4) Ронжин Д.В., "Линейные автоматы над полем рациональных чисел", Интеллектуальные системы. Теория и приложения, 21:4 (2017), 144-155
5) Буевич В.А., "О полноте, A-полноте и t-полноте в классе автоматных отображений", Интеллектуальные системы, 10:1-4 (2006), 613-638
6) Ронжин Д.В., "A-полнота систем с добавками в классе линейных автоматов над кольцом двоично-рациональных чисел", Интеллектуальные системы. Теория и приложения., 23:4, с. 125-131