Сравнение нелинейных решателей в рамках метода продолжения для моделирования стационарного течения подземных вод в условиях переменной насыщенности

Ануприенко Денис Валерьевич

Аспирант, инженер-исследователь

Институт вычислительной математики имени Г. И. Марчука Российской академии наук, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики, Москва, Россия

E-mail: denis-anuprienko@yandex.ru

Научный руководитель — *Капырин Иван Викторович*

В настоящее время с помощью математического моделирования решается широкий ряд гидрогеологических задач, таких как обоснование безопасности пунктов захоронения радиоактивных отходов и прочих потенциально загрязняющих подземные воды объектов. При рассмотрении зон, расположенных вблизи земной поверхности, где поры среды заполнены водой лишь частично, течение подземных вод описывается уравнением Ричардса [1], которое в стационарном случае можно представить в виде

$$-\nabla \cdot (K_r(h)\mathbb{K}\nabla h) = Q, \tag{1}$$

где h – напор воды, K_r – относительная проницаемость среды, $\mathbb{K}$ – тензор фильтрации (матрица размера 3×3), Q – объемные источники и стоки.

Часто тензор фильтрации $\mathbb{K}$ резко меняется в пространстве и может быть анизотропным, а относительная проницаемость K_r является сильно нелинейной и иногда негладкой функцией. В связи с этим, системы нелинейных уравнений, которые получаются в результате дискретизации уравнения (1) на неструктурированных сетках с помощью различных схем метода конечных объемов, практически невозможно решить простым применением стандартных решателей, таких как метод Ньютона и метод простой итерации, и необходимо применять более сложные подходы.

В данной работе рассматривается ранее предложенный авторами подход – *метод продолжения* [2]. В этом методе уравнение (2) параметризуется следующим образом через *параметр продолжения*

q:

$$-\nabla \cdot (\mathcal{K}(h,q)\mathbb{K}\nabla h) = Q, \tag{2}$$

где функция $\mathcal{K}(h,q)$ такова, что $\mathcal{K}(h,0) \equiv 1$ и $\mathcal{K}(h,1) \equiv K_r(h)$. Таким образом, при $q = 0$ уравнение (2) является линейным уравнением, а при $q = 1$ – исходным уравнением (1). Решив простое линейное уравнение с $q = 0$, можно перейти к решению уравнения с $q > 0$, подав ранее полученное решение в качестве начального приближения; такими шагами q увеличивается до 1.

Следуя [3], предложенный в [2] вариант метода продолжения можно рассмотреть как простейший метод продолжения типа предиктор-корректор, где предиктор фактически отсутствует (может быть назван предиктором нулевого порядка), а корректором выступает метод Ньютона. Потенциал развития методов продолжения заключается в возможности применения более сложных предикторов, которые предположительно помогут сильно снизить число шагов по q. Однако, перед исследованием сложных предикторов необходимо усовершенствовать и корректор, чтобы в дальнейшем использовать более эффективный вариант. В данной работе рассматриваются следующие подходы: метод Ньютона, метод простой итерации, смешанный подход на основе метода Ньютона с начальным применением метода простой итерации для улучшения начального приближения, а также процедура линейного поиска. Работа методов сравнивается в рамках метода продолжения с предиктором нулевого порядка [2] на реальных гидрогеологических задачах при использовании сложных схем метода конечных объемов, в том числе схем с многоточечной и нелинейной аппроксимацией потока.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №20-31-90126.

Литература

1. Bear J., Cheng A. H. D. Modeling groundwater flow and contaminant transport. – Springer Science & Business Media, 2010. – V. 23.
2. Anuprienko D., Kapyrin I. Nonlinearity continuation method for steady-state groundwater flow modeling in variably saturated conditions //Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2021. – C. 113502.
3. Allgower E. L., Georg K. Introduction to numerical continuation methods. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.