

**ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРНО
ЛИНЕЙНО ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Емельянов Дмитрий Павлович

Аспирант

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: emelianov@cs.msu.ru

Научный руководитель — Ломов Игорь Сергеевич

Рассматриваются две краевые задачи для нерегулярно линейно вырождающегося эллиптического дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами в прямоугольнике $D = (0, 1) \times (0, b)$, $b > 0$.

$$\begin{cases} u''_{xx} + yu''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x, y), & (x, y) \in D, \\ u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 0, & x \in [0, 1], y \in [0, b] \end{cases} \quad (1)$$

– краевая задача D в терминологии М. В. Келдыша [1], при $c(0) < 1$,

$$\begin{cases} u''_{xx} + yu''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x, y), & (x, y) \in D, \\ u(0, y) = u(1, y) = u(x, b) = 0, & x \in [0, 1], y \in [0, b], \\ |u(x, 0)| < +\infty, & x \in [0, 1] \end{cases} \quad (2)$$

– краевая задача E, при $c(0) \geq 1$.

Классические решения указанных задач строятся в классе $C^2(D) \cap C(\bar{D})$. Коэффициенты задачи и правая часть являются аналитическими функциями переменной y в комплексном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < b\}$.

Развивается метод спектрального выделения особенностей [2, глава X], [3]. Решение строится в виде ряда по собственным функциям оператора задачи по переменной x , в котором коэффициенты являются функциями переменной y . При этом неаналитическая зависимость от y выписывается в явном виде. При общих ограничениях на правую часть доказано, что классическое решение указанных задач может быть выписано в виде одного из следующих рядов.

Если $c(0) \geq 1$, то классическое решение краевой задачи E имеет

вид

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k(y) \sin \pi kx. \quad (3)$$

Если $c(0) < 1$, $c(0) \neq 0, -1, -2, \dots$, то классическое решение краевой задачи D имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\eta_k(y) + y^{1-c(0)} \varphi_k(y) \right) \sin \pi kx. \quad (4)$$

Если $c(0) = 0, -1, -2, \dots$, то классическое решение краевой задачи D имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} (\eta_k(y) + \ln y \cdot \varphi_k(y)) \sin \pi kx. \quad (5)$$

Здесь функции $\eta_k(y), \varphi_k(y)$ аналитичны в U , все ряды сходятся равномерно в \bar{D} и допускают двукратное дифференцирование внутри D .

Литература

1. Келдыш М. В. Избранные труды. Математика. М.: Наука. 1985. — 448 стр.
2. Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Издательство Московского университета, 2011. — 456 с.
3. Емельянов Д. П., Ломов И. С. Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 1. С. 45–58.