О существовании периодических решений у нелинейной системы 3-го порядка

Бегишев Руслан Ренатович,
Роговский Александр Игоревич

Студент, программист

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: `begrusso@gmail.com, alexander.rogovskiy@gmail.com`

Научный руководитель — *Ильин Александр Владимирович*

Рассматривается нелинейная система 3-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{z_1} = z_2 \\ \dot{z_2} = -z_1 + \mu(-\gamma z_2 + \operatorname{th}(z_3)(\Delta - z_1)) \\ \dot{z_3} = -\beta z_3 + \alpha(\cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1) + 1), \end{cases} \tag{1}$$

решение которой зависит от начальных условий $z(0) = z_0 \in R^3$ и параметра μ. Данная система моделирует работу энергетического комбайна, представленного в [1]. Для его функционирования важна периодичность, поэтому следует изучить вопрос о существовании периодических решений системы (1) при малых μ.

Заметим, что периодические решения существуют не при всех значениях параметров системы (см.[2]).

В данной работе получены достаточные условия существования периодических решений.

Для получения достаточных условий воспользуемся несколько модифицированным вариантом метода малого параматра, предложенный в [3, с.396]. Получим следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть параметры* $\alpha, \beta, \gamma, \Delta, \zeta$ *таковы, что существует* $p_1^* > 0 : H(p_1^*) = 0, \frac{\partial H(p_1^*)}{\partial p} \neq 0$. *Тогда система* (1) *имеет периодическое решение при малых* μ. *Здесь*

$$H(p) = \gamma \pi p +$$

$$+ \int\limits_0^{2\pi} (\Delta - p\cos s) \operatorname{th}[e^{-\beta s}[\frac{\alpha}{e^{\beta 2\pi} - 1} \int\limits_0^{2\pi} e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos q)) dq +$$

$$+ \alpha \int\limits_0^{s} e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p\cos q)) dq] + \frac{\alpha}{\beta}] \sin s ds. \tag{2}$$

После чего получаем следующее:

Следствие 1. *Пусть параметры $\alpha, \beta, \Delta, \zeta$ таковы, что существуют числа $\bar{\bar{p}} > \bar{p} > 0$:*

$$I(\bar{p}) < 0, I(\bar{\bar{p}}) > 0.$$

Тогда найдётся такое число $\gamma > 0$, что система (1) *имеет периодические решения при $\mu \in [0, \bar{\mu}]$. Здесь:*

$$I(p) = \int_0^{2\pi} (\Delta - p\cos s)\,\mathrm{th}[\omega(s,p)]\sin s ds, \tag{3}$$

$$\omega(s,p) = e^{-\beta s}[\frac{\alpha}{e^{\beta 2\pi} - 1}\int_0^{2\pi} e^{\beta q}\cos(\zeta\,\mathrm{arctg}(p\cos q))dq+$$

$$+\alpha\int_0^{s} e^{\beta q}\cos(\zeta\,\mathrm{arctg}(p\cos q))dq] + \frac{\alpha}{\beta} \tag{4}$$

Эвристическими методами были найдены значения параметров, удовлетворяющие условиям следствия 1: $\alpha = 0.3, \beta = 2, \Delta = 0.1, \zeta = 5.6$. Была вычислена функция $I(p)$ на отрезке $[0, 5]$ (Рис.1).

На Рис.2 приведено решение системы (1) с полученными выше параметрами. Можно видеть, что решение действительно является периодическим.

Иллюстрации

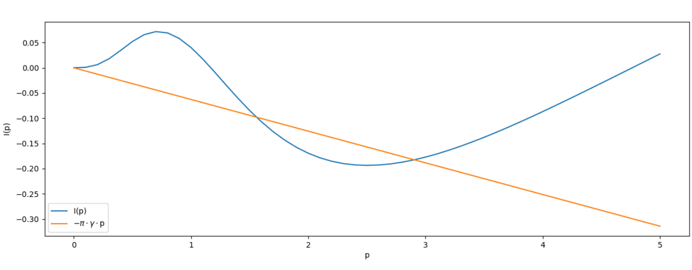

Рис.1: $I(p)$

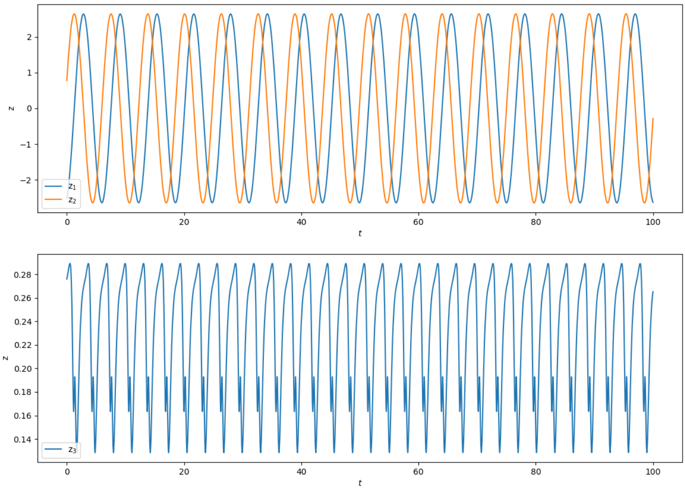

Рис.2: Решение системы (1)

Литература

1. Todorov, Todor и др. “Modelling and Investigation of a Hybrid Thermal Energy Harvester”. В: MATEC Web Conf. 148 (2018), с. 12002. doi: 10.1051/matecconf/201814812002. url: https://doi.org/10.1051/matecconf/201814812002.
2. V.V. Fomichev и др. “Investigation of a Hybrid Thermal Energy Harvester”. В: Computational Mathematics and Modeling 31.1 (2020), с. 293—307
3. Э.А. Коддингтон и Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Издательство иностранной литературы, 1958.