Исследование задачи управления колебаниями прямоугольной мембраны за счет управления на границе

Ашабоков Аслан Нажмудинович

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: as.ashabokov98@gmail.com

***Научный руководитель** — Куржанский Александр Борисович*

Работа посвящена исследованию задачи управления колебаниями однородной прямоугольной мембраны с граничным управлением, соответствующим граничным условиям Дирихле. Закон движения мембраны описывается следующим уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + F.$$

Производится переход от уравнения колебаний в частных производных к аппроксимирующей системе ОДУ вида:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t). \\ x(t_0) = x_0, \\ u(t) \in \mathcal{E}\left(p_0, P(t)\right). \end{cases}$$

Далее вводятся эллипсоидальные ограничения на управление и производится декомпозиция исходной системы на две вспомогательные подсистемы:

$$\begin{cases} \dot{g}(t) = Ag(t) - \widetilde{p_0} - f(t), \\ g(t_0) = g_0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + v(t), \\ z(t_0) = 0, \\ v(t) \in \mathcal{E}\left(0, \widetilde{P}(t)\right), \end{cases} \tag{2}$$

где в качестве управления выступает уже $v(t)$.

В работе были доказаны следующие вспомогательные утверждения:

Теорема 1. *Пусть в момент времени t^* $g(t^*) \in \mathcal{Z}\,[t^*]$, где $\mathcal{Z}\,[t]$ — множество достижимости системы (2), $g(t)$ — траектория системы (1). Пусть непрерывная функция $f(t)$ удовлетворяет условию $f(t) \in \mathcal{E}\left(-\widetilde{p}_0, \widetilde{P}(t)\right)$ при $t \geq t^*$. Тогда система может быть стабилизирована для любого $t \geq t^*$.*

Теорема 2. *Пусть* $f(t) \in \mathcal{E}\left(-\widetilde{p}_0, \widetilde{G}(t)\right)$, *пусть управление удовлетворяет следующим ограничениям:* $v(t) \in \mathcal{E}\left(0, \widetilde{P}(t)\right)$, *где* $\widetilde{G}(t) = s^2(t)Q$, $\widetilde{P}(t) = r^2(t)Q$, *причем* $0 < s(t) < r(t)$ *для любого* $t \geq t_0$. *Тогда найдется* t^* *такое, что* $g(t^*) \in \mathcal{Z}[t^*]$, *где* $\mathcal{Z}[t]$ *— множество достижимости системы* (2), $g(t)$ *— траектория* (1).

Далее в работе рассматриваются два метода построения приближенного решения задачи управления с использованием эллипсоидальных оценок [1, 2]: построение стабилизирующего управления с использованием метода прицеливания на множество [3] и решение задачи быстродействия с использованием внешних и внутренних эллипсоидальных оценок множества достижимости системы (2). Исследованы различные постановки задачи: доступно управление на всей границе и на части границы. Предложена программная реализация параллельного вычисления эллипсоидальных оценок. На основе алгоритма эффективного построения внутренних и внешних оценок предложен алгоритм нахождения верхних и нижних оценок времени быстродействия, а также алгоритм построения оптимальной по быстродействию траектории. Построены различные примеры численного решения поставленной задачи, демонстрирующие результаты работы предложенных алгоритмов.

Литература

1. Kurzhanski A. B., Varaiya P. On Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis. Part II: Internal Approximations, Box-Valued Constraints // Optimization methods and software. 2002. V. 17. №. 2. P. 207–237.
2. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Dynamic Optimization for Reachability Problems // Journal of Optimization Theory and Applications. 2001. V. 108, № 2, P. 227–251.
3. Kurzhanski A. B., Varaiya P. System & Control: Foundations & Applications. Switzerland: Springer International Publishing, 2014. P. 443.