Критерий диверсифицируемости в терминах ожидаемых средних потерь

Логванёва Мария Геннадьевна

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: masha.logvaneva@gmail.com

***Научный руководитель** — Целищев Михаил Андреевич*

В работе предлагается аксиоматическое определение понятие диверсификации инвестиционного портфеля, где под последним понимается случайных доход (или убыток) от вложения капитала инвестора в один или несколько финансовых активов с фиксированным временным горизонтом.

Определение основано на предположении о том, что выпуклая линейная комбинация набора инвестиционных портфелей $X_1, \ldots, X_n$ не хуже, чем вероятностная смесь этих же активов с такими же весами, т.е.

$$\xi \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \eta \quad \Longleftrightarrow \quad \eta \overset{d}{=} \operatorname*{mix}_{\beta} X \ \text{ и } \xi \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i \,, \text{ где } \beta_i \geqslant 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1,$$

а под $\operatorname*{mix}_{\beta} X$ понимается случайная величина, которая имеет функцию распределения $\sum_{i=1}^{n} \beta_i F_{X_i}$.

Иными словами, постулируется, что распределение средств по разным активам предпочтительнее вложения всего капитала в случайно выбранный актив.

Для того, чтобы иметь возможность сравнивать большее число портфелей, будем говорить, что инвестиционный портфель ξ является диверсификацией инвестиционного портфеля η с положительной добавкой, если существует такой портфель ξ_0, что $\xi \overset{\text{1sd}}{\succcurlyeq} \xi_0 \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \eta$, где $\xi \overset{\text{1sd}}{\succcurlyeq} \xi_0$ — стохастическая доминация первого порядка, которая определяется следующим образом:

$$F_{\xi}(x) \leqslant F_{\xi_0}(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

Далее строится замыкание предложенного отношения предпочтения на пространстве распределений на прямой с конечными первыми моментами по метрике Канторовича, которая задаётся следующим образом:

$$\boldsymbol{\kappa}(\xi,\eta)=\boldsymbol{\kappa}(F_\xi,F_\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}|F_\xi(x)-F_\eta(x)|\,dx=\int_0^1|q_p(\xi)-q_p(\eta)|\,dp,$$

где $q_p(\xi)=\inf\{x\in\mathbb{R}:F_\xi(x)\geqslant p\}$ — нижняя квантиль распределения случайной величины ξ уровня p.

Оказывается, что построенное замыкание тесно связано с широко используемой на практике мерой риска Expected Shortfall, определяемой как

$$\mathrm{ES}_\alpha(\xi)=-\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha q_p(\xi)\,dp,\quad \alpha\in(0,1].$$

Данная мера риска имеет смысл средних убытков по портфелю в худших $\alpha\cdot 100\%$ случаях.

Для итогового определения диверсификации доказан следующий критерий:

Теорема 1. *Пусть математические ожидания портфелей ξ и η конечны, тогда портфель ξ не хуже портфеля η в смысле замыкания отношения диверсификации с положительной добавкой по метрике Канторовича, если и только если* $\mathrm{ES}_\alpha(\xi)\leqslant\mathrm{ES}_\alpha(\eta)$ *для всех* $\alpha\in(0,1]$.

Литература

1. Tselishchev M. On the Concavity of Expected Shortfall, `https://arxiv.org/abs/1910.00640`
2. Acerbi C., Tasche D. Expected Shortfall: a Natural Coherent Alternative to Value at Risk `https://arxiv.org/abs/cond-mat/0105191`
3. Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F. A Probability Metrics Approach to Financial Risk Measures. John Wiley & Sons, 2011.