Секция «Математические модели в космосе»

Задача о брахистохроне с квадратичным сопротивлением и ограничением на угол наклона траектории

Научный руководитель – Черкасов Олег Юрьевич

Смирнова Нина Владимировна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Факультет космических исследований, Москва, Россия

E-mail: nina.smirnova247@yandex.ru

Рассматривается движение материальной точки в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и вязкого трения, пропорционального скорости во второй степени. В качестве управления рассматривается скорость изменения угла наклона траектории. Задача состоит в максимизации горизонтальной дальности за заданное время или в минимизации времени перехода на заданное расстояние по горизонтали (задача о брахистохроне). Предполагается, что имеются фазовые ограничения на угол наклона траектории. В научной литературе известны постановки задачи о брахистохроне без трения при наличии фазовых ограничений. В работе [1] рассматривались ограничения на угол наклона траектории, в [2,3]- ограничения вида $y \geq ax + b$. При этом учет фазовых ограничений производился при помощи численных процедур. В настоящей работе строится синтез оптимального управления с фазовыми ограничениями на угол наклона траектории, аналитически устанавливается количество дуг движения по ограничению. Уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид [4]:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta, \\ \dot{y} = v\sin\theta, \\ \dot{v} = -v^2 - \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь x – дальность, y – высота, v – скорость, θ – угол наклона траектории, на который наложено фазовое ограничение вида $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, u – управление, кусочно-непрерывная функция, ограничения на управление отсутствуют.

Начальные условия:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0.$$

Значение $\theta(0), y(T), v(T)$ свободны.
Функционал имеет вид:

$$J = -x(T) \to \min, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Переходя к редуцированной системе с управлением θ получаем регулярную оптимальную задачу с ограничениями на управление. С помощью принципа максимума задача оптимального управления сводится к краевой задаче для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{v} = -v^2 - \sin\theta, \\ \dot{\psi}_v = 2v\psi_v - \cos\theta. \end{cases} \tag{2}$$

$$v(0) = v_0, \quad \psi_v(T) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

$$\theta = \begin{cases} \theta_1, - \operatorname{arctg}(\psi_v/v) < \theta_1, \\ - \operatorname{arctg}(\psi_v/v), - \operatorname{arctg}(\psi_v/v) \in [\theta_1, \theta_2], \\ \theta_2, - \operatorname{arctg}(\psi_v/v) > \theta_2. \end{cases}$$

В результате применения принципа максимума аналитически устанавливается, что оптимальная траектория может содержать не более одной дуги движения по нижнему ограничению и не более двух дуг движения по верхнему ограничению. При отсутствии сопротивления показывается, что, оптимальная траектория содержит не более одной дуги с движением по каждому из ограничений.

Источники и литература

1) Cheng,D. Conrad. Optimum translation and the brachistochrone //American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), Aerospace Sciences Meeting, 1964. doi:10.2514/6.1964-49.
2) Stuart Dreyfus. The Numerical Solution of Variational Problems//Journal of mathematical analysis and applications, 1962. P.30-45
3) Brian C. Fabien.Numerical Solution of Constrained Optimal Control Problems with Parameters// Applied mathematics and computation, 1996. P.43-62
4) Зароднюк А.В., Бугров Д.И., Черкасов О.Ю.О свойствах реакции опорной кривой в задаче о брахистохроне в сопротивляющейся среде // Фундаментальная и прикладная математика., издательство Интуит(М.)., том 22, No.2, 2018. 147-158 с.