Секция «Математические модели в космосе»

Способ решения задачи оптимальной ортонормализации матрицы поворота

Научный руководитель – Куланов Николай Владмирович

Григоров Петр Юрьевич

Выпускник (магистр)

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

E-mail: grigoroff@bk.ru

Для уменьшения негативного влияния вычислительных ошибок, возникающих в процессе численного интегрирования уравнений движения твердого тела на длительных временных промежутках, необходимо периодически корректировать «орты» связанной системы координат. Предлагается новая методика коррекции матрицы направляющих косинусов. Корректирующие добавки строятся для всех трёх векторов и выбираются из условия минимизации суммы их квадратов и выполнения условий ортогональности и нормировки после корректировки. Необходимые условия оптимальности сводят задачу к решению шести алгебраических уравнений второго порядка, для которых не существует общих методов решения.

При численном интегрировании пространственного движения твердого тела, матрица поворота, задающая текущую ориентацию, может претерпевать "искажения" – терять ортогональность и нормировку. И таким образом она уже не будет являться матрицей поворота. Для исправления этих искажений применяют процедуры ортогонализации, например классический или модифицированный методы Грама Шмидта [1], которые не обладают оптимальностью в смысле минимальных отклонений входной и скорректированной матриц. В работе предлагается новый метод поиска оптимальной ортогональной матрицы с использованием метода множителей Лагранжа и численных методов решения полиномиальных уравнений 4го порядка, который является усовершенствованным методом из работы [2]. Данный метод может быть полезен и интересен теоретическим специалистам, а также инженерам для решения прикладных задач. С точки зрения прикладного применения, метод может быть использован в задачах моделирования пространственного движения и может быть полезен в таких областях как прикладная механика, авиация, космонавтика, робототехника, небесная механика и прочих.

Постановка задачи. Заданы три вектора $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$ искаженной, но не вырожденной, матрицы поворота $\mathbf{B}$. Требуется скорректировать $\mathbf{B}$ и получить новые вектора $\mathbf{c_1}$, $\mathrm{c}_\mathbf{2}$, $\mathbf{c_3}$, обеспечив условие ортонормированности, выраженное через скалярные произведения векторов, с учетом минимального отклонения по сумме квадратов их норм:

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{i=1..3} {\alpha_i}^{\mathbf{2}} \rightarrow \min\\ &\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_i = 1 \ \ i = 1..3\\ &\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = 0 \ \ i, j = 1..3,\ i \neq j, \quad (1)\\ &\text{где } \alpha_i = (\mathbf{c}_i - \mathbf{b}_i).\end{aligned}$$

Функция Лагранжа имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}L = {\alpha_1}^{\mathbf{2}} + {\alpha_2}^{\mathbf{2}} + {\alpha_3}^{\mathbf{2}} + \lambda_1 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 - 1) + \lambda_2 (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 - 1) + \lambda_3 (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + ...\\ ... + \lambda_4 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 + \lambda_5 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_3 + \lambda_6 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_3 \qquad (2)\end{aligned}$$

Необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = 2\alpha_1 + 2\lambda_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_4 \mathbf{c}_2 + \lambda_5 \mathbf{c}_3 = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} = 2\alpha_2 + 2\lambda_2 \mathbf{c}_2 + \lambda_4 \mathbf{c}_1 + \lambda_6 \mathbf{c}_3 = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_3} = 2\alpha_3 + 2\lambda_3 \mathbf{c}_3 + \lambda_5 \mathbf{c}_1 + \lambda_6 \mathbf{c}_2 = \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_i = 1 \ i = 1..3 \\ \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = 0 \ \ i,j = 1..3, \ i \neq j \end{cases} \qquad (3)$$

Из (1) и (3) получается:

$$2\left(1+\lambda_1\right)\mathbf{c}_1+\lambda_4\mathbf{c}_2+\lambda_5\mathbf{c}_3=2\mathbf{b}_1 \ \lambda_4\mathbf{c}_1+2\mathbf{c}_2\left(1+\lambda_2\right)+\lambda_6\mathbf{c}_3=2\mathbf{b}_2 \ \lambda_5\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2\lambda_6+2\mathbf{c}_3\left(1+\lambda_3\right)=2\mathbf{b}_3 \qquad (4)$$

Система уравнений (4) линейна по $\mathbf{c}_1$,$\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ и решается методом Крамера:

$$\begin{aligned} &\mathbf{c}_1=\tfrac{2}{\Delta}\left[\mathbf{b}_1\left(4\left(1+\lambda_2\right)\left(1+\lambda_3\right)-{\lambda_6}^2\right)-\mathbf{b}_2\left(2\lambda_4\left(1+\lambda_3\right)-\lambda_5\lambda_6\right)-\mathbf{b}_3\left(2\lambda_5\left(1+\lambda_2\right)-\lambda_4\lambda_6\right)\right] \\ &\mathbf{c}_2=\tfrac{2}{\Delta}\left[\mathbf{b}_1\left(\lambda_5\lambda_6-2\lambda_4\left(1+\lambda_3\right)\right)+\mathbf{b}_2\left(4\left(1+\lambda_1\right)\left(1+\lambda_3\right)-{\lambda_5}^2\right)-\mathbf{b}_3\left(2\lambda_6\left(1+\lambda_1\right)-\lambda_4\lambda_5\right)\right] \qquad (5) \\ &\mathbf{c}_3=\tfrac{2}{\Delta}\left[\mathbf{b}_1\left(\lambda_4\lambda_6-2\lambda_5\left(1+\lambda_2\right)\right)-\mathbf{b}_2\left(2\lambda_6\left(1+\lambda_1\right)-\lambda_4\lambda_5\right)+\mathbf{b}_3\left(4\left(1+\lambda_1\right)\left(1+\lambda_2\right)-{\lambda_4}^2\right)\right] \end{aligned}$$

Сделав замены, (5) можно переписать в следующем виде: $\mathbf{c}_1=x_1\mathbf{b}_1+x_4\mathbf{b}_2+x_5\mathbf{b}_3$

$$\mathbf{c}_2=x_2\mathbf{b}_2+x_4\mathbf{b}_1+x_6\mathbf{b}_3 \qquad (6)$$

$$\mathbf{c}_3=x_3\mathbf{b}_3+x_5\mathbf{b}_1+x_6\mathbf{b}_2$$

Теперь используя условия ортогональности и нормировки из (1) можно найти решение системы задающей необходимые условия экстремума, обозначив $\mathbf{b}_i\mathbf{b}_j=\mathbf{b}_{\mathrm{ij}}$:

$$\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_1={x_1}^2\mathbf{b}_{11}+{x_4}^2\mathbf{b}_{22}+{x_5}^2\mathbf{b}_{33}+2x_1x_4\mathbf{b}_{12}+2x_1x_5\mathbf{b}_{13}+2x_4x_5\mathbf{b}_{23}=1 \qquad (7)$$
$$\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{c}_2={x_2}^2\mathbf{b}_{22}+{x_4}^2\mathbf{b}_{11}+{x_6}^2\mathbf{b}_{33}+2x_2x_4\mathbf{b}_{12}+2x_4x_6\mathbf{b}_{13}+2x_6x_6\mathbf{b}_{23}=1 \qquad (8)$$
$$\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{c}_3={x_3}^2\mathbf{b}_{33}+{x_5}^2\mathbf{b}_{11}+{x_6}^2\mathbf{b}_{22}+2x_3x_5\mathbf{b}_{13}+2x_5x_6\mathbf{b}_{12}+2x_3x_6\mathbf{b}_{23}=1 \qquad (9)$$
$$\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_2=\left(x_1x_2+{x_4}^2\right)\mathbf{b}_{12}+x_1x_4\mathbf{b}_{11}+\left(x_1x_6+x_5x_4\right)\mathbf{b}_{13}+x_4x_2\mathbf{b}_{22}+\left(x_4x_6+x_5x_2\right)\mathbf{b}_{23}+x_5x_6\mathbf{b}_{33}=0 \qquad (10)$$
$$\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_3=\left(x_1x_6+x_4x_5\right)\mathbf{b}_{12}+x_1x_5\mathbf{b}_{11}+\left(x_1x_3+{x_5}^2\right)\mathbf{b}_{13}+x_4x_6\mathbf{b}_{22}+\left(x_3x_4+x_5x_6\right)\mathbf{b}_{23}+x_3x_5\mathbf{b}_{33}=0 \qquad (11)$$
$$\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{c}_3=\left(x_4x_6+x_2x_5\right)\mathbf{b}_{12}+x_4x_5\mathbf{b}_{11}+\left(x_3x_4+x_5x_6\right)\mathbf{b}_{13}+x_2x_6\mathbf{b}_{22}+\left(x_2x_3+{x_6}^2\right)\mathbf{b}_{23}+x_3x_6\mathbf{b}_{33}=0 \qquad (12)$$

Соотношения (7)-(12) образуют систему уравнений 6-ой размерности для определения шести неизвестных $x_i (i = 1, ..., 6)$. Анализируя (7)-(12) видно, что систему можно разбить на три пересекающиеся подсистемы, по три уравнения: [(7), (8), (10)], [(7), (9), (11)], [(8), (9), (12)].

Можно проверить, что любая из этих подсистем эквивалентна любой другой при замене соответствующих индексов в (6). Например, для получения системы [(7), (9), (11)] из системы [(7), (8), (10)] нужно заменить b_{12} на b_{13}, b_{22} на b_{33} и x_4 на x_5.

Примем систему [(7), (8), (10)] в качестве опорной и запишем её в виде:

$$\begin{gathered} a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0; \\ b_0y^2 + b_1y + b_2 = 0; \\ c_0xy + c_1x + c_2y + c_3 = 0, \end{gathered} \qquad (13)$$

где

$$\begin{aligned} &x = x_1,\ y = x_2\ ,\ a_0 = b_{11},\ a_1 = 2(b_{12}x_4 + b_{13}x_5),\ a_2 = b_{22}x_4^2 + b_{33}x_5^2 + 2b_{23}x_4x_5 - 1; \\ &b_0 = b_{22},\ b_1 = 2(b_{12}x_4 + b_{23}x_6),\ b_2 = b_{11}x_4^2 + b_{33}x_6^2 + 2b_{13}x_4x_6 - 1; \\ &c_0 = b_{12},\ c_1 = b_{11}x_4 + b_{13}x_6,\ c_2 = b_{22}x_4 + b_{23}x_5,\ c_3 = b_{12}x_4^2 + b_{13}x_4x_5 + b_{23}x_4x_6 + b_{33}x_5x_6. \end{aligned} \qquad (14)$$

Согласно определению из теории многочленов [3,4] результантом двух многочленов - $f\left(x\right) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ и $g\left(y\right) = b_0y^m + b_1y^{m-1} + \ldots + b_{m-1}y + b_m$, для которых $a_0 \neq 0$ $b_0 \neq 0$, называется выражение: $\mathrm{Res}\left(f, g\right) = \prod_{(x,y):f(x)=0,\ \ g(y)=0}\left(x - y\right)$. То есть результант является произведением всех возможных разностей корней многочленов

$f(x)$ и $g(y)$. Очевидно, что если у многочленов есть хотя бы один общий корень, то результант будет равен нулю. Результант можно найти как определитель матрицы следующего вида:

$$\operatorname{Res}(f,g)=\det\left[\begin{array}{l} m\left\{\begin{matrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{matrix}\right. \\ \text{n}\left\{\begin{matrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{matrix}\right. \end{array}\right] \tag{15}$$

Из (15) получается, что для уравнений $f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$ и $g(x)=c_0x^2+c_1x+c_2$ результант записывается в виде: $R(f,g)=(a_0c_2-a_2c_0)^2-(a_1c_2-a_2c_1)(a_0c_1-a_1c_0)$.

Далее используется следующая схема решения – для: [(7), (8), (10)] находится результант для уравнений (7) и (10) относительно x_1. Из-за трансцендентности полученных уравнений связи записать их в явном и компактном виде как функции x_4, x_5, x_6 оказалось проблематично. Для упрощения работы использовались средства символьных вычислений. На этом шаге получается функция вида $R_{7,10}=B_0y^2+B_1y+B_2=0$. Как можно видеть, B_0, B_1, B_2 являются функциями x_4, x_5, x_6. Далее ищется результант для $R_{7,10}$ и (8) - $R_{7,8,10}=A1x_4^4+B1x_4^3+C1x_4^2+D1x_4+E1$. $A1, B1, C1,$ D1, $E1$ являются функциями только от переменных x_5, x_6, поэтому равенство $A1x_4^4+B1x_4^3+C1x_4^2+D1x_4+E1=0$ определяет неявное уравнение в виде полинома четвёртой степени для нахождения x_4 при заданных x_5, x_6. Последовательное решение каждой из редуцированных подсистем в результате даёт три уравнения связи для x_4, x_5, x_6.

Таким образом, задача нахождения x_4, x_5, x_6 сведена к стандартной задаче вычислительной математики. Существует множество способов численного решения систем нелинейных уравнений. В любом случае применение любого из них предполагает наличие начального приближения, которое обеспечивает сходимость процесса. Априори о значениях x_4, x_5, x_6 ничего не известно. Однако, учитывая, что вектора $\mathbf{c}_1$,$\mathbf{c}_2$,$\mathbf{c}_3$ должны быть близки $\mathbf{b}_1$,$\mathbf{b}_2$,$\mathbf{b}_3$, можно предположить, что значения коэффициентов x_1, x_2, x_3 порядка единицы, а слагаемые с x_4, x_5, x_6 достаточно малы и для них можно принять нулевые значения. Это позволяет провести первую итерацию решения уравнений для результантов редуцированных систем аналитически и использовать полученное решение в качестве первого приближения в итерационном процессе поиска значений x_4, x_5, x_6.

Заключение. В докладе представлена основная информация о новом способе решения задачи ортогонализации и нормировки матриц направляющих косинусов, получивших «деформацию» в процессе численного интегрирования. На основе материалов из доклада были проведены численные эксперименты для оценки скорости и точности работы алгоритмов. Результаты экспериментов продемонстрировали пригодность и эффективность использования данного метода для решения задач численного моделирования пространственного движения твердых тел относительно различных систем координат. Полученные алгоритмы могут найти свое применение в областях инженерии, где важно точное позиционирование.