

Исследование устойчивости положения равновесия двойного маятника

Научный руководитель – Юмагулов Марат Гаязович

Белова Анна Сергеевна

Аспирант

Башкирский государственный университет, Факультет математики и информационных технологий, Уфа, Россия

E-mail: 89177662488@yandex.ru

Рассматривается гамильтонова система двух маятников без трения, связанных пружинной кручения

$$\begin{cases} x'' + \sin x = f(\varepsilon, t)(x - y), \\ y'' + \sin y = f(\varepsilon, t)(y - x), \end{cases} \quad (1)$$

где $f(\varepsilon, t) = m_0 + \varepsilon\varphi(t)$ – жесткость пружины при $m_0 \geq 0$. Полагается, что $\varphi(t)$ – 2π -периодическая функция, т.е. $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t)$.

Исследуется устойчивость системы (1) в окрестности нулевой точки равновесия. Для этого, выполняется переход к системе вида

$$x' = JA(\varepsilon, t)x, \quad x \in R^4, \quad \text{где } JA(\varepsilon, t) = JA_0 + \varepsilon JS_1(t); \quad (2)$$

$$JA_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_0 - 1 & -m_0 & 0 & 0 \\ -m_0 & m_0 - 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad JS_1 = \begin{bmatrix} -\varphi(t) & \varphi(t) & 0 & 0 \\ \varphi(t) & -\varphi(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Несложно показать, что собственные значения матрицы JA_0 имеют вид: $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{2m_0 - 1}$. Поэтому наибольший интерес в данной задаче представляется при $m_0 = \frac{3}{8}$. В этом случае собственные значения $\lambda_{3,4}$ имеют вид: $\lambda_{3,4} = \pm\omega_0 i$, где $\omega_0 = \frac{1}{2}$.

Тогда матрица монодромии $V_0 = e^{JA_0 T}$ системы (2) при $\varepsilon = 0$ имеет полупростое собственное значение $\mu_0 = -1$ кратности 2. Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ “возмущенной” системы (2) при малых $|\varepsilon|$ имеет пару собственных значений $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ представимых в виде:

$$\mu_1(\varepsilon) = -1 + \mu_1^{(1)}\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \mu_2(\varepsilon) = -1 + \mu_1^{(2)}\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}).$$

В докладе рассматриваются методы определения значений $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$. Предлагаются основные методы построения границы области устойчивости гамильтоновой системы (2).

Источники и литература

- 1) Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1975. 740 с.
- 2) Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Белова А. С. Методы исследования устойчивости линейных периодических систем, зависящих от малого параметра, Дифференциальные уравнения, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 163, ВИНТИ РАН, М., 2019, 113–126.