

Модифицированное расстояние Громова-Хаусдорфа и геометрия пространства орбит действия группы изометрии

Научный руководитель – Тужилин Алексей Августинович

Малышева Ольга Сергеевна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: osm95@mail.ru

Пусть M обозначает метрическое пространство с функцией расстояния d , $\mathcal{P}(M)$ — семейство непустых подмножеств M , а $\mathcal{H}(M)$ — семейство непустых замкнутых ограниченных подмножеств M . Обозначим через G группу движений в \mathcal{R}^n , сохраняющих ориентацию. Тогда эту группа естественным образом действует на пространстве $\mathcal{H}(M)$, которое расслаивается на орбиты этого действия. Обозначим через $\mathcal{H}_o(\mathcal{R}^n)$ пространство орбит.

Определение 1. Пусть A и B — элементы $\mathcal{P}(M)$. *Расстоянием по Хаусдорфу* между этими множествами называется величина

$$d_H(A, B) = \inf \left\{ r : (A \subseteq B_r(B)) \wedge (B \subseteq B_r(A)) \right\}.$$

Определение 2. *Расстоянием в евклидовой метрике Громова-Хаусдорфа* между A и B называется величина

$$d_{EGH}(A, B) = \inf \left\{ d_H(A, OB) \right\},$$

где O — движение пространства, сохраняющее ориентацию.

Определение 3. Движение O , на котором достигается $d_{EGH}(A, B)$, будем называть *оптимальным*, а пару (A, OB) — *оптимальным взаимным расположением*.

Пусть M — конечное множество, а $G = (V, E)$, $V \subset X$ — некоторый связный граф. Будем говорить, что G *соединяет* M , если $M \subset V$. M называется *границей* всех графов, соединяющих M . *Точкой Ферма* для трехточечной границы A_1, A_2, A_3 называется такая точка S , что $\sum_{i=1}^3 d(A_i, S)$ минимально.

Определение 4. Граф G , соединяющий X , минимально возможной длины $d(G)$, является деревом, которое называется *минимальным деревом Штейнера на X* .

Замечание 1. Минимальное дерево Штейнера существует не всегда. Например, если рассмотреть евклидову плоскость без одной точки, то в полученном метрическом пространстве не существует минимального дерева Штейнера, соединяющего вершины правильного треугольника, центром которого является выколота точка.

Определение 5. *Точками Штейнера* называются внутренние вершины минимального дерева Штейнера.

Пусть $\mathcal{M} = (M, d)$ — конечное псевдометрическое пространство, $G = (V, E)$ — граф, соединяющий M , и $\omega: E \rightarrow \mathcal{R}_+$ — некоторое отображение, называемое *весовой функцией* и порождающее взвешенный граф $\mathcal{G} = (G, \omega)$. Функция ω порождает псевдометрику d_ω на V : *Расстоянием между вершинами \mathcal{G}* называется минимальный вес путей, соединяющих эти вершины. Взвешенный граф \mathcal{G} называется *заполнением пространства \mathcal{M}* , если для любых точек $p, q \in M$ имеем $d(p, q) \leq d_\omega(p, q)$. *Минимальным заполнением* называется заполнение \mathcal{G}_0 такое, что $\omega(\mathcal{G}_0) = \inf_{\mathcal{G}} \omega(\mathcal{G})$.

Пространство всех компактных подмножеств \mathcal{R}^n с метрикой Хаусдорфа является ограничено компактным.

Пусть $Z(x, r_x)$ обозначает окрестность радиуса $r_x \geq 0$ отрезка длины $x \geq 0$. Будем обозначать через \mathcal{X} подмножество в $\mathcal{H}_o(\mathcal{R}^n)$, составленное из классов эквивалентности всех окрестностей всех отрезков в \mathcal{R}^n .

Теорема 1. Пусть $A = Z(a, r_A), B = Z(b, r_B)$. Тогда

$$d_{EGH}(A, B) = \max \left\{ |r_A - r_B|, \left| \frac{b}{2} - \frac{a}{2} + r_B - r_A \right| \right\}.$$

Теорема 2. Для границы $\mathcal{M} := \{[A_1], \dots, [A_n]\} \subset \mathcal{X}$ существуют $[S_1], \dots, [S_m] \in \mathcal{X}$, реализующие минимальное заполнение данной границы. В частности, $[S_1], \dots, [S_m]$ являются ее точками Штейнера.

Теорема 3. Для трехточечных границ $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{X}$, где $X_1 = Z(x_1, r_1)$, $X_2 = Z(x_2, r_2)$, $X_3 = Z(x_3, r_3)$ таких, что $d_{EGH}(X_i, X_j) = \left| \frac{x_i}{2} - \frac{x_j}{2} + r_i - r_j \right|$, точка Ферма в смысле евклидова расстояния по Громову–Хаусдорфу является точкой Ферма в смысле расстояния по Громову–Хаусдорфу.

Источники и литература

- 1) Бурого Д.Ю., Бурого Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии*. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.
- 2) Facundo Memoli. *Gromov–Hausdorff distances in Euclidean spaces* // Computer Vision and Pattern Recognition Workshops. 2008. IEEE Computer Society Conference on. June 2008. 1–8.
- 3) Иванов А. О., Николаева Н. К., Тужилин А. А. *Проблема Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа: случай конечных метрических пространств* // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 4. — С. 152–161.
- 4) Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings. 2016, ArXiv e-prints, arXiv:1604.06116