

**Интегрируемый бильярд в эллипсе в потенциальном поле высокой степени.****Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич****Пустовойтов Сергей Евгеньевич***Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
 Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и  
 приложений, Москва, Россия  
*E-mail: pustovoitovse1@mail.ru*

Рассмотрим математический бильярд в эллипсе  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$  с абсолютно упругим отражением от границы. Пусть на материальную точку действует некоторый потенциал  $Q(x, y)$ . Уравнения движения точки примут следующий вид:

$$\ddot{x} = -Q_x$$

$$\ddot{y} = -Q_y$$

Это гамильтонова система с гамильтонианом  $H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + Q(x, y)$ . Известно, что при  $Q = 0$  такая бильярдная система вполне интегрируема по Лиувиллю, то есть существует первый интеграл  $\lambda$ , функционально независимый с гамильтонианом  $H$  и находящимся с ним в инволюции. Однако, в общем случае для произвольной функции  $Q$  интегрируемость не сохраняется. В.В.Козлов в [2] предложил следующее условие, гарантирующее существование дополнительного первого интеграла вида  $F = \lambda + f(x, y)$ :

$$(a - b)Q_{xy} + 3(yQ_x - xQ_y) + Q_{xy}(y^2 - x^2) + xy(Q_{xx} - Q_{yy}) = 0$$

Найдем решение этого уравнения в виде многочлена. В эллиптических координатах  $(\lambda_1, \lambda_2)$  оно имеет следующий вид:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{p(\lambda_1) - p(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

где  $p$  – некоторый многочлен.

Изучим теперь наш бильярд с таким потенциалом  $Q$  с точки зрения слоения Лиувилля, используя язык инвариантов Фоменко-Цишанга [1].

**Теорема** *В интегрируемом эллиптическом бильярде с полиномиальным потенциалом различным уровням интегралов  $H$  и  $F$  соответствуют следующие атомы:  $A, B, C_2, D_1, E_4, A^*$ .*

Получен широкий класс полных инвариантов Фоменко-Цишанга такого бильярда, а также описаны его бифуркационные диаграммы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01303)

**Источники и литература**

- 1) Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. — Ижевск: РХД, 1999.
- 2) Козлов В.В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. // Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995.