Типичные особенности интегрируемых гамильтоновых систем

Научный руководитель – Кудрявцева Елена Александровна

Онуфриенко Мария Викторовна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: mary.onufrienko@gmail.com

Фиксируем любое $s \in \mathbb{N}$ и рассмотрим действие группы $G = \mathbb{Z}_s$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ вида $z \longrightarrow e^{2\pi i/s}z$, где $z = x + iy \in \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Рассмотрим морсовские функции $g_0 = g_0^{\pm,\pm}(z) = \pm|z|^2 = \pm(x^2+y^2)$ при любом $s \geq 1$, и $g_0 = g_0^{+,-}(z) = x^2 - y^2$ при $s = 1, 2$.

Рассмотрим два семейства $\mathbb{Z}_s-$инвариантных ростков $g_k = g_k(z, \lambda, a)$, $k = 1, 2$, в нуле:

$$g_1 = g_1(z,\lambda,a) = \begin{cases} \pm x^2 + y^3 + \lambda y, & s = 1, \\ \pm x^2 \pm y^4 + \lambda y^2, & s = 2, \\ Re(z^3) + \lambda |z|^2, & s = 3, \\ Re(z^s) \pm a|z|^4 + \lambda|z|^2, & s \geq 4,\ a^2 \neq 1 \text{ при } s = 4,\ a > 0 \text{ при } s \geq 5, \end{cases}$$

$$g_2 = g_2(z,\lambda,a) = \begin{cases} \pm x^2 \pm y^4 - \lambda_2 y^2 + \lambda_1 y, & s = 1, \\ \pm x^2 \pm y^6 + \lambda_2 y^4 + \lambda_1 y^2, & s = 2, \\ Re(z^4) \pm (1+\lambda_2)|z|^4 \pm a|z|^6 + \lambda_1|z|^2, & s = 4,\ a > 0, \\ Re(z^5) \pm a|z|^6 + \lambda_2|z|^4 + \lambda_1|z|^2, & s = 5,\ a > 0, \\ Re(z^6) + a_1|z|^6 \pm a_2|z|^8 + \lambda_2|z|^4 + \lambda_1|z|^2, & s = 6,\ a_1^2 \neq 1, a_1 a_2 \neq 0. \end{cases}$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{R}^k$ — малый параметр, $a \in \mathbb{R}^m$ — «модуль», $m \in \{0, 1, 2\}$ — «модальность».

Теорема 1. *Рассмотрим классы* правой $G-$эквивалентности *$G-$инвариантных ростков функций $g_k(z, 0, \hat{a})$ двух переменных в нуле, $k = 0, 1, 2$. Эти особенности имеют $G-$коразмерность k, $G-$кратность Милнора $k+m+1$, $G-$версальную деформацию $g_k(z, \lambda, a) + \lambda_0$, и образуют полный список $G-$инвариантных особенностей $G-$коразмерности $k \leq 2$. Дополнение к их объединению в множестве $\mathfrak{n}_G^2$ $G-$инвариантных ростков в нуле, имеющих критическую точку 0 с критическим значением 0, имеет коразмерность > 2 в $\mathfrak{n}_G^2$.*

Теорема 1 не следует из классификации [1] особенностей $G-$кратности Милнора ≤ 5.

Интегрируемая система на $2n$-мерном симплектическом многообразии (M, Ω) задается гладким отображением $F = (f_1, \dots, f_n) : \ M \longrightarrow \mathbb{R}^n$, где $\{f_i, f_j\} = 0$. Возникает *лагранжево слоение с особенностями* на M, слои которого — это связные компоненты множеств $F^{-1}(c)$. Пусть M компактно, поля X_{f_j} касаются ∂M, и F имеет «хорошее» поведение около ∂M. Отображение F порождает гамильтоново $\mathbb{R}^n-$действие на M.

Рассмотрим свободное действие группы $\mathbb{Z}_s$ на полнотории $V := D^2 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times S^1$ вида $(z, \varphi_1) \longrightarrow (e^{2\pi \ell i/s}z, \varphi_1 + \frac{2\pi}{s})$, где $\varphi_1 \in S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, $0 \leq \ell < s$, $(\ell, s) = 1$. Рассмотрим «цилиндр» $W := D^{n-1} \times (S^1)^{n-2}$ с координатами $(\lambda, \varphi') = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$.

Оказывается, локальные особенности (т.е. $\mathbb{R}^n-$орбиты) коранга 1 типичных интегрируемых систем имеют окрестности, послойно диффеоморфные *стандартной модели* вида

$$F_{st} : (V/\mathbb{Z}_s) \times W \to \mathbb{R}^n,\ F_{st}(z, \varphi_1, \lambda, \varphi') = (g_k(z, \lambda', a(\lambda)), \lambda), \quad \Omega_{st} = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{d}\lambda_j \wedge \mathrm{d}\varphi_j,$$

где $0 \le k < n$, $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $a(\lambda)$ и $a_1(\lambda)$ — гладкие функции при $(k, s) \in \{(1, 4), (2, 6)\}$, $a(\lambda) \equiv 1$ для остальных пар (k, s); $a(\lambda) = (a_1(\lambda), 1)$ при $(k, s) = (2, 6)$.

Теорема 2 (Кудрявцева Е. А., Онуфриенко М. В.). *Пусть* $n = \frac{1}{2}\dim M \in \{2, 3\}$. *Рассмотрим класс* $\mathcal{I} = \mathcal{I}(M)$ *интегрируемых систем на* M, *для которых функции* $f_2, \dots, f_n$ *порождают локально-свободное гамильтоново действие* $(n-1)-$*мерного тора на* M. *Если некоторая окрестность* $\mathbb{R}^n-$*орбиты послойно диффеоморфна стандартной модели, то эта орбита структурно устойчива относительно возмущений в классе* $\mathcal{I}$. *Если орбита структурно устойчива, то некоторая ее окрестность послойно гомеоморфна стандартной модели. Класс* $\mathcal{I}_{st} \subset \mathcal{I}$ *систем, все локальные особенности которых послойно диффеоморфны стандартным, открыт в* $\mathcal{I}$ *(относительно* $C^\infty-$*топологии), и* $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_{st}$ *имеет коразмерность* > 0.

Теорема 2 при $n = 2$, $k = 1$ описывает параболические траектории с резонансами [2], а при $n = 3$, $k = 2$ — их типичные бифуркации.

Источники и литература

1) *Wassermann G.* Classification of singularities with compact Abelian symmetry // Singularities Banach Center Publications. 1988. V. 20. P. 475–498.

2) *Калашников В.В.* Типичные интегрируемые гамильтоновы системы на четырехмерном симплектическом многообразии // Изв. РАН, Сер. матем. 1998. Т. 62. No. 2. С. 49–74.