

Проверка обобщённой гипотезы Мищенко-Фоменко для алгебр Ли малой размерности.

Научный руководитель – Ошемков Андрей Александрович

Лобзин Федор Игоревич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: fadat@mail.ru

Пусть g - алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем \mathbb{K} . Соответственно g^* -пространство, сопряженное алгебре Ли g . Рассмотрим на g^* структуру, называемую скобкой Ли-Пуассона:

$$\mathcal{A}_x(x) = (c_{ij}^k x_k), \quad x \in g^*.$$

Данный тензор определяет скобку Ли-Пуассона на $C^\infty(g^*)$. Функции $f \in C^\infty$, лежащие в ядре скобки Ли-Пуассона, называются функциями Казимира.

Так же можно рассмотреть похожую структуру, называемую скобкой Пуассона с замороженным аргументом:

$$\mathcal{A}_a(x) = (c_{ij}^k a_k), \quad a, x \in g^*.$$

Алгебра Ли называется вполне интегрируемой, если на ней найдется полный набор функций, находящихся в инволюции. Полным считается набор, содержащий в себе n функционально независимых функций, где n определяется формулой:

$$n = \frac{1}{2}(\dim g + \text{ind } g).$$

Наибольший практический интерес представляют наборы, состоящие из многочленов.

- Гипотеза Мищенко-Фоменко: на двойственном пространстве g^* любой алгебры Ли g существует полный набор полиномов в инволюции.
- Обобщенная гипотеза Мищенко-Фоменко: на двойственном пространстве g^* любой алгебры Ли g существует полный набор полиномов в биинволюции, то есть набор, одновременно находящийся в инволюции относительно \mathcal{A}_x и \mathcal{A}_a .

Первая гипотеза была доказана Садэтовым в 2004 году (см.[2]), но наборы, полученные им, не всегда оказывались в инволюции и относительно скобки с замороженным аргументом. Отметим, что при применении общего метода построения наборов в биинволюции (метод Мищенко-Фоменко сдвига аргумента), во-первых, полученные наборы не для всех алгебр Ли (как, например, для полупростых алгебр Ли) являются полными, во-вторых, они функционально независимы не для всех значений параметра a .

В докладе будет рассказано о проверке обобщенной гипотезы Мищенко-Фоменко для нильпотентных алгебр Ли малой размерности ($\dim g < 8$), классификация таких алгебр Ли и функции Казимира были взяты из [1] и [3]. Для всех таких алгебр Ли различными методами в явном виде были построены полные наборы многочленов в биинволюции для всех параметров a . Были изучены параметры, для которых метод сдвига аргумента давал функционально зависимые наборы, и в них предоставлены другие полные наборы в биинволюции. Также установлена инвариантность построенных параметрических семейств многочленов в биинволюции относительно замены базиса.

Источники и литература

- 1 А.А Короткевич, Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности// Матем.сб.200:12 (2009), 3-40.
- 2 A. V. Bolsinov, Complite commutative subalgebras in polynomial Poisson algebras: a proof of the Mischenko-Fomenko conjecture// Theor. Appl. Mech., 43:2 (2016), 145-168.
- 3 A.I. Ooms, The Poisson center and polynomial, maximal Poisson commutative subalgebras, especially for nilpotent Lie algebras of dimension at most seven// journal of algebra 365 (2012) 83-113