Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Двойственная задача максимизации робастной полезности

Научный руководитель – Гущин Александр Александрович

Фарвазова Айсылу Азатовна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: aisylufarvazova@gmail.com

Пусть задана функция полезности $U\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. Фиксируем фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$. По функции полезности U определим функцию Юнга $\hat{U}(x):=-U(-|x|)+U(0)$. Положим $V:=-U^*$ и $\hat{V}:=\hat{U}^*$. Отметим, что для вогнутой функции f сопряженная функция f^* определяется как вогнутая функция $f^*(y)=\inf_x\{\langle x,y\rangle - f(x)\}$, а для выпуклой функции $f-$ как выпуклая функция $f^*(y)=\sup_x\{\langle x,y\rangle - f(x)\}$. Зададим семейство $\mathcal{Q}$ (субъективных) мер как непустое выпуклое подмножество вероятностных мер на $(\Omega,\mathcal{F})$: $\mathcal{Q}\subset\{Q\ll P\colon dQ/dP\in L_+^{\hat{V}}(P)$ для некоторой меры $P\}$. $L^{\hat{U}}(\mathcal{Q})$ — пространство Орлича по семейству мер $\mathcal{Q}$; S — семимартингал, описывающий цены базовых активов; $L(S)$ — множество всех предсказуемых S-интегрируемых процессов H, отвечающих инвестиционным стратегиям; $X_t := \int_0^t H_u dS_u$ — прибыль инвестора к моменту времени t. Если $B\in L^{\hat{U}}(\mathcal{Q})$ — случайная величина, представляющая случайное возможное вложение в терминальный момент времени T, то терминальный капитал равен $B+\int_0^T H_t dS_t$.

В данной работе под задачей максимизации робастной полезности со случайным вкладом в терминальный момент времени T мы понимаем следующую задачу максимизации:

$$\inf_{Q\in\mathcal{Q}}\mathbb{E}_Q U\Big(B+\int_0^T H_t dS_t\Big)\longrightarrow \sup_{H\in\mathcal{J}}.$$

Здесь $\mathcal{J}$ — множество допустимых стратегий: $\mathcal{J}=\{H\in L(S)\colon\ \inf_{t\in[0,T]}\int_0^t H_u dS_u\in L^{\hat{U}}(\mathcal{Q})\}$. Введем следующие обозначения: $\mathcal{K}=\{H\cdot S_T\colon H\in\mathcal{J}\}$, $\mathcal{C}=(\mathcal{K}-L_+^0(P))\cap L^{\hat{U}}(\mathcal{Q})$. Здесь $\mathcal{C}-$конус. Учитывая случайное вложение, формально заменим множество $\mathcal{K}$ множеством $\mathcal{A}:=B+\mathcal{K}$.

Накладываются дополнительные предположения на функцию полезности U, семейство мер $\mathcal{Q}$ и на множество терминальных капиталов $\mathcal{K}$.

В работе выводится двойственная задача для максимизации робастной полезности со случайным вкладом в терминальный момент времени и с функцией полезности, конечной на полупрямой. Результат данной работы является усилением работы [1], в которой рассматривается неробастная постановка. В работе [2] получен аналогичный результат для функции полезности, удовлетворяющей другим условиям и случайное вложение B в терминальный момент времени T равен константе. В работе [3] двойственная задача имеет гораздо более сложный вид.

Источники и литература

1) Biagini S., Černý A. Convex Duality and Orlicz Spaces in Expected Utility Maximization. // Mathematical Finance. 2020. Vol. 30. Issue 1. 85—127.

2) Гущин А. А. Двойственная характеризация цены в задаче максимизации робастной полезности. // Теория вероятн. и её примен. 2010. 55, №4. 680–704.

3) Хасанов Р. В. О задаче максимизации полезности в случае неограниченного случайного вклада. // Вестн. Моск. ун-та, Серия 1. Математика. Механика. 2013. 3. 10–21.