Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

О задачах согласования компонент в конечномерных моделях с гауссовским шумом

Научный руководитель – Манита Анатолий Дмитриевич

Акбар Фахима Ясмин

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: akbar.fahima@yandex.ru

Рассмотрим стохастическую модель с дискретным временем $t = 0, 1, 2, \ldots$, состоящую из n участников, которые обмениваются мнениями, следующего вида:

$$X(t+1) = WX(t) + \xi(t+1)$$

Мы предполагаем, что вектор $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, где $x_i(t) \in \mathbb{R}$ это мнение i-ого агента в момент времени t. Элемент $w_{i,j}$ интерпретируется как степень влияния j-ого участника на формирование мнения i-ого. Полагаем, что матрица $W = (w_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ является симметричной и стохастической. Вектор помех $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))^T$ зависит от времени, причём $\{\xi_i(t) \backsim N(0, \sigma^2), i \in \{1, \ldots, n\}, t \in \mathbb{Z}_+\}$−независимые с.в. Предположим также, что изначальная конфигурация мнений $X(0)$ не зависит от набора $\{\xi(t)\}$.

Определение. Векторное подпространство $L_C = \{C \cdot (1, \ldots, 1)^T | C \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$ называется консенсусным.

Целью работы является исследование поведения распределения вектора $X(t)$ при $t \to +\infty$. В частности, нас будет интересовать насколько конфигурация $X(t)$ приблизится к L_C.

Проведенное исследование двумерного случая и $n-$мерного случая при симметричной матрице обмена мнениями показало, что для решения задачи эффективно использовать спектральное представление для матрицы W (см.[1]) и характеристические функции (см. [2]).

Теорема. Состояние системы $X(t)$ представимо в виде $X(t) = Y(t)+Z(t)$, где $Y(t) \in L_C$ для $\forall t$ и при этом

1) $Z(t)$ сходится по распределению к некоторому многомерному нормальному закону при $t \to \infty$,

2) $\frac{Y(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{d} \nu \cdot (1, \ldots, 1)^T$, где $\nu-$ случайная величина распределенная по нормальному закону.

Пределы в пунктах 1) и 2) не зависят от начальной конфигурации $X(0)$.

Данная задача мотивирована математическими моделями балансировки нагрузки (см. [3]), многочисленные модификации которой активно изучаются и в настоящее время.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Маните А.Д. за профессиональное и талантливое руководство, а также за ценные советы при выполнении научной работы.

Источники и литература

1) Винберг Э.Б., *Курс алгебры*, Москва: МЦНМО, 2019

2) Ширяев А.Н., *Вероятность*, Москва: МЦНМО, 2007

3) Cybenko G., *Dynamic Load Balancing for Distributed Memory Multiprocessors*, Journal of Parallel and Distributed Computing 7, 279-301, 1989