Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Об одном обобщении марковской модели эволюции мнений

Научный руководитель – Манита Анатолий Дмитриевич

Воробьева Маргарита Юрьевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: vorobyeva.margarita@yandex.ru

Рассмотрим марковский процесс $X(t)$ с дискретным временем, мотивированный задачей обмена мнениями в сообществе из K участников, детали можно посмотреть в [1,2]. Каждый участник i имеет скрытое от других мнение $X_i(t) = \theta_j \in \Theta$, где Θ некоторое упорядоченное множество из N различных мнений, $\theta_j \in (0,1)$. В каждый момент времени t участники узнают информацию о количестве участников, находящихся в специально выбранных областях $M^- = [a,b]$ и $M^+ = [c,d]$, где $0 \leq a \leq b \leq N$ и $0 \leq c \leq d \leq N$. Множества M^- и M^+ определяют функции действий для каждого участника:

$$a_i^{(-)}(t) = I_{[X_i(t) \in \{\theta_m, m \in M_-\}]} \qquad a_i^{(+)}(t) = I_{[X_i(t) \in \{\theta_m, m \in M_+\}]}$$

После получения этой информации мнение $X_i(t) = \theta_j$ на следующем шаге меняется на одно из соседних θ_{j-1} или θ_{j+1} с вероятностями $\mu^-(t) = \frac{C}{K}\sum_{i=1}^K a_i^{(-)}(t) + \delta$ и $\mu^+(t) = \frac{C}{K}\sum_{i=1}^K a_i^{(+)}(t) + \delta$ соответственно, а с вероятностью $1-\mu^- - \mu^+$ сохраняется: $X_i(t+1) = \theta_j$. Малое слагаемое δ отвечает за то, чтобы динамика не "залипала"в случае, если множества M^- и M^+ опустеют от участников. В определяемом марковском процессе участники условно независимы, то есть, вероятности перехода за один шаг имеют вид:

$$P(\vec{X}(t+1) = \vec{\theta}^{t+1} | \vec{X}(t) = \vec{\theta}^t) = \prod_{i=1}^K P(X_i(t+1) = \theta_j^{t+1} | \vec{X}(t) = \vec{\theta}^t)$$

Интерес представляют системы с большим числом частиц K. Перейдем к “частотному” процессу, разделив компоненты на K: $\rho_j^{(K)}(t) = \frac{\#\{k\colon X_k(t)=\theta_j\}}{K}$. Доказано, что если последовательность начальных конфигураций такова, что $\vec{\rho}^{(K)}(0) \xrightarrow{P} \vec{\rho}^{(\infty)}(0)$ при $K \to \infty$, тогда при любом t имеет место сходимость $\vec{\rho}^{(K)}(t) \xrightarrow{P} \vec{\rho}^{(\infty)}(t)$ и последовательность векторов $\{\vec{\rho}^{(\infty)}(t),\ t = 0,1,2,\ldots\}$ является решением некоторой нелинейной эволюционной системы уравнений. При этом оказывается, что количество ее стационарных решений зависит от параметра $q = \frac{C}{\delta}$. Мы исследуем проблему существования порогового значения $q_{cr} > 0$, которое разделяет случаи с разным количеством стационарных решений.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Маните А.Д. за постановку задачи и внимание к работе.

Источники и литература

1) Limit evolution in some Markovian models of opinion dynamics with large number of participants Vorobyeva M., Manita A. Journal of Physics — 2021. — Vol. 1740. http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1740/1/012041
2) Об одной марковской модели эволюции мнений Воробьева М.Ю. в сборнике Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020», серия Математика и механика, издательство ООО "МАКС Пресс"(Москва), тезисы