Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Алгебры медленно растущей длины

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Кудрявцев Дмитрий Константинович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: kdk97@rambler.ru

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Систематическое изучение длины алгебры как ее фундаментального инварианта началось в конце 20 века с работ [1, 2], где изучаются свойства длины для ассоциативных, в том числе матричных, алгебр. В частности, работа [2] рассматривает связь длины с размерностью алгебры и максимальной степенью минимальных многочленов для ее элементов. Изучение подобной связи для неассоциативного случая начато в работе [3].

Рассмотрим конечномерную, не обязательно ассоциативную алгебру A над полем $\mathbb{F}$. Пусть $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — конечный набор ее элементов. *Словом длины* k от S называется произведение $a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k}$ с произвольным порядком выполнения умножений, где $i_m \in \{1, \ldots, n\}$.

Обозначим через $L_k(S)$ линейную оболочку над $\mathbb{F}$ всех слов от S длины не более k. Говорят, что система элементов S *порождает алгебру* A, если существует k, такое что $L_k(S)$ совпадает с A. Самое маленькое такое k называется *длиной* S.

Длиной алгебры A, обозначаемой $l(A)$, называется максимальная длина среди всех длин конечных систем порождающих A.

Будем говорить, что класс алгебр имеет *медленно растущую длину*, если для каждого его представителя A верно $l(A) \leq \dim(A)$. Несложно показать, что ассоциативные алгебры имеют медленно растущую длину.

Утверждение 1. Алгебры Лейбница, Новикова и Зинбиеля имеют медленно растущую длину, причём для любого целого $n \geq 1$ существует алгебра каждого класса, для которой $n = l(A) = \dim(A)$

Утверждение 2. Для алгебр Ли выполнено $l(A) \leq \dim(A) - 1$, причём для любого целого $n \geq 2$ существует алгебра Ли, для которой $l(A) = \dim(A) - 1 = n - 1$.

Источники и литература

1) Paz, A. An application of the Cayley-Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables, Linear Multilinear Algebra, 1984, Vol.15, pp. 161-170
2) Pappacena, C. An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra, Journal of Algebra, 1997, Vol. 197, pp. 535-545
3) Guterman, A., Kudryavtsev, D. Upper bounds for the length of non-associative algebras, Journal of Algebra, 2020, Vol. 544, pp. 483-497