

Рациональные приближения к двум иррациональным числам**Научный руководитель – Мощевитин Николай Германович****Шульга Никита Анатольевич***Аспирант*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории чисел, Москва, Россия*E-mail: nikita1279@yandex.ru*

Для вещественного числа ξ мы рассматриваем функцию меры иррациональности $\psi_\xi(t) = \min_{1 \leq q \leq t, q \in \mathbb{Z}} \|q\xi\|$, где $\|\cdot\|$ - расстояние до ближайшего целого. В 2009 году Кан и Мощевитин доказали, что если $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, то разность $\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)$ меняет свой знак бесконечно много раз при $t \rightarrow \infty$. В 2017 году Дубицкасу удалось показать, что если $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, то последовательность

$$d(n) = \left| \frac{1}{\psi_\alpha(n)} - \frac{1}{\psi_\beta(n)} \right|$$

является неограниченной. Наконец, в 2019 году Мощевитин получил следующий результат:

$$|\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)| \geq K \cdot \min(\psi_\alpha(t), \psi_\beta(t)) \quad \text{для бесконечно многих } t,$$

где $K = \sqrt{\tau} - 1 = 0.2720^+$, а $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ - золотое сечение. Было также показано, что константа K является оптимальной.

Используя классическую оценку $\psi_\xi(t) \leq \frac{1}{t}$, Мощевитин получил улучшение результата Дубицкаса о последовательности $d(n)$, а именно

$$\left| \frac{1}{\psi_\alpha(t)} - \frac{1}{\psi_\beta(t)} \right| \geq Kt \quad \text{для бесконечно многих } t.$$

Данный результат оптимальным не является, поэтому в нашем докладе мы докажем оптимальную оценку

$$\left| \frac{1}{\psi_\alpha(t)} - \frac{1}{\psi_\beta(t)} \right| \geq Ct \quad \text{для бесконечно многих } t.$$

Где константа C связана с K соотношением $C = K(\sqrt{\tau} + \tau^{-3/2})$, или $C = \sqrt{5}(1 - \sqrt{\phi}) = 0.47818^+$, где $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Источники и литература

- 1) Kan, I.D., Moshchevitin, N.G.: *Approximations to two real numbers*, Unif. Distrib. Theory 5(2), 79-86 (2010)
- 2) Dubickas, A.: *On rational approximations to two irrational numbers*, J. Number Theory 177, 43-59 (2017)
- 3) Moshchevitin, N.G.: *Über die Funktionen des Irrationalitätsmaßes für zwei irrationale Zahlen*, Arch. Math. 112 (2019), 161-168