Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Соотношения между суммами Оно

Научный руководитель – Уланский Евгений Александрович

Забродина Дарья Владимировна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории чисел, Москва, Россия

E-mail: daria120897@yandex.ru

Кратное дзета-значение для допустимого индекса $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$, то есть такого индекса, что $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ и $k_r > 1$, задается рядом

$$\zeta(\boldsymbol{k}) = \zeta(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{n_r > \ldots > n_1 \geq 1} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}.$$

Для индекса $\boldsymbol{k} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{a_1 - 1}, b_1 + 1, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1}_{a_l - 1}, b_l + 1),\ a_i, b_i \geq 1$, введем дуальный индекс $\boldsymbol{k}^\dagger = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{b_l - 1}, a_l + 1, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b_1 - 1}, a_1 + 1)$. Также для допустимого индекса $\boldsymbol{k}$ и неотрицательного целого числа m определим суммы Оно $\mathcal{O}_m(\boldsymbol{k})$ и $\mathcal{O}(\boldsymbol{k})$ следующим образом:

$$\mathcal{O}_m(\boldsymbol{k}) := \sum_{|e| = m} \zeta(\boldsymbol{k} \oplus \boldsymbol{e}) \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{O}(\boldsymbol{k}) := \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{O}_m(\boldsymbol{k}) X^m \in \mathbb{R}[[X]].$$

Справедлива следующая теорема [1].

Теорема 1 Соотношение Оно. *Для любого допустимого индекса $\boldsymbol{k}$ верно, что*

$$\mathcal{O}(\boldsymbol{k}) = \mathcal{O}(\boldsymbol{k}^\dagger),$$

где $\boldsymbol{k}^\dagger$ - дуальный к $\boldsymbol{k}$ символ.

В статье [2] были доказаны две теоремы, дающие новые соотношения между суммами Оно, которые не вытекают из *теоремы 1.*

Теорема 2 Двойное соотношение Оно. *Пусть d и $n_0, \ldots, n_{2d}$ – целые неотрицательные числа, индекс $\boldsymbol{k}$ имеет следующий вид:*

$$\boldsymbol{k} = (\{2\}^{n_0}, 1, \{2\}^{n_1}, 3, \ldots, \{2\}^{n_{2d-2}}, 1, \{2\}^{n_{2d-1}}, 3, \{2\}^{n_{2d}}).$$

Тогда для любого неотрицательного целого m выполнено

$$\sum_{|\boldsymbol{e}| = m} \mathcal{O}(\boldsymbol{k} \oplus \boldsymbol{e}) = \sum_{|\boldsymbol{e}'| = m} \mathcal{O}\left(\boldsymbol{k}^\dagger \oplus \boldsymbol{e}'\right).$$

Теорема 3. *Для любых целых $s, t \geq 2$ выполнено*

$$F(s; (t+1)) = F(t; (s+1)),$$

где $F(s; \boldsymbol{k}) := \mathcal{O}((s) \,\widetilde{ш}\, \boldsymbol{k}) - \mathcal{O}((s) \,\widetilde{ш}\, \boldsymbol{k}^\dagger)$.

Помимо доказательства двух теорем, авторы статьи [2] выдвинули ряд гипотез, позволяющих получить соотношения между суммами Оно, не следующие из уже доказанных теорем. В данной работе удалось полностью свести одну из гипотез к другой, а также доказать частные случаи выдвинутых гипотез, что позволяет рассчитывать на их справедливость в общем случае.

Источники и литература

1) Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values. J. Number Theory 74, 1999, p. 39–43.
2) Minoru Hirose, Hideki Murahara, Tomokazu Onozuka, Nobuo Sato, Linear relations of Ohno sums of multiple zeta values. https://arxiv.org/abs/1910.07740v1.