Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Конструирование конфигураций на плоскости автоматом с красками

Научный руководитель – Волков Николай Юрьевич

Миндуллин Марат Халилович
Студент (бакалавр)
Филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова в г.Ташкенте, Ташкент, Узбекистан
E-mail: m.mindullin@gmail.com

Рассматривается перемещение конечного инициального автомата на плоскости. Функционирование автомата воспроизводит на ней цветную конфигурацию, включающую в себя те клетки, которые, начиная с определенного момента, приобретают цвет, отличный от 0 (белого), и не включающую клетки, остающиеся белыми всегда, а также становящиеся белыми сколь угодно часто.

Автоматом с красками назовем семерку $\mathcal{A} = (\mathbb{E}_n, B, Q, \varphi, \psi, \psi', q_0)$, где $n \in \mathbb{N}$ — число красок автомата, $\mathbb{E}_n \subset \mathbb{N}_0$ — входной алфавит (множество красок автомата $\mathcal{A}$), B — выходной алфавит, Q — внутренний алфавит автомата $\mathcal{A}$, $\varphi : Q \times \mathbb{E}_n \to Q$ и $\psi : Q \times \mathbb{E}_n \to B$ — соответственно функции переходов и выходов автомата $\mathcal{A}$, $\psi' : Q \times \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_n$ — функция окрашиваний, $q_0 \in Q$ — его начальное состояние.

Окрашенную в результате работы автомата часть плоскости назовем *следом* автомата $\mathcal{A}$, стартующего из точки (x_0, y_0), и обозначим через $T_{(x_0,y_0)}(\mathcal{A})$. Определим это множество следующим образом:

$$(x, y) \in T_{(x_0,y_0)}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{N} : \forall t \geq t_0 \;\; C(x, y, t) \geq 0,$$

где $C(x, y, t)$ — цвет клетки (x, y) в момент времени t. Скажем, что множество $\mathbb{X}$ *конструируемо* автоматом с красками $\mathcal{A}$, если $\exists \mathcal{A}$, $\exists (x_0, y_0)$: $T_{(x_0,y_0)}(\mathcal{A}) = \mathbb{X}$.

Назовем *орнаментом* множество на $\mathbb{Z}^2$, имеющее группу самосовмещений, содержащую параллельный перенос на ненулевой вектор. Разделим множество орнаментов на два класса:

1) *Бордюры*, у которых все векторы параллельного переноса являются коллинеарными.
2) Орнаменты с двумя неколлинеарными векторами параллельного переноса.

Результаты:

1) Пустое множество конструируемо.
2) Целочисленная плоскость конструируема.
3) Любое конечное множество конструируемо.
4) Алгебраическое дополнение к любому конечному множеству конструируемо.
5) Множество всех конечных конструируемых множеств с их алгебраическими дополнениями, пустым множеством и всей плоскостью является алгеброй множеств из $\mathbb{Z}^2$.
6) Любой бордюр является конструируемым множеством.
7) Любой орнамент с двумя неколлинеарными векторами параллельного переноса является конструируемым множеством.
8) Любое состояние ленты машины Тьюринга может быть взаимно однозначно сопоставлено некоторой конфигурации плоскости.