Полнота и финитная аппроксимируемость модальных логик, аксиоматизируемых формулами глубины один, в окрестностной семантике.

Научный руководитель – Шехтман Валентин Борисович

Копнев Кирилл Михайлович
Студент (бакалавр)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: kmkopnev@mail.ru

Окрестностная семантика для модальных логик впервые была сформулирована Дана Скоттом [1] и Ричардом Монтегю [2] независимо друг от друга в 1970 году. Поскольку окрестностная семантика является обобщением семантики Крипке, её удобно использовать при изучении свойств ненормальных логик. Так, например, многие ненормальные логики оказываются полными относительно окрестностных шкал, в то время как относительно шкал Крипке они не полны. Кроме того, окрестностная семантика представляет интерес для формальной эпистемологии и теории игр, поскольку позволяет моделировать рассуждения нескольких эпистемических субъектов. Поскольку основными объектами в окрестностной семантике являются множества и семейства множеств, то введение определенных ограничений на окрестностные модели позволяет переходить к изучению других математических структур. Одним из наиболее важных примеров подобных структур являются топологические структуры, которые в контексте модальной логики обладают широким кругом приложений в информатике, математической лингвистике и основаниях математики. Больше об окрестностной семантике в [4].

Дэвид Льюис в [3] предлагает доказательство полноты и финитной аппроксимируемости всех логик, аксиоматизируемых конечным числом формул глубины 1. Тем не менее, в доказательстве одной из лемм имеется неустранимый пробел, который делает доказательство ошибочным.

Определение 1.

Глубина формулы $d(\varphi)$ формулы φ определяется по индукции:
1. $d(p) = 0$;
2. $d(\varphi \wedge \psi) = max\{d(\varphi), d(\psi)\}$;
3. $d(\neg\varphi) = d(\varphi)$;
4. $d(\Box\varphi) = 1 + d(\varphi)$.

Теорема Д.Льюиса, при доказательстве которой была допущена ошибка, формулируется следующим образом:

Теорема 1. *Если L – логика, аксиоматизируемая формулами глубины 1, и $L \nvdash \varphi$, то существует шкала $F \in \boldsymbol{F}_L$ такая, что $F \nvDash \varphi$ и $\boldsymbol{F}_L$ – класс всех шкал, на которых L общезначима. Более того, мощность шкалы F конечна и может быть оценена с помощью формулы φ.*

Ошибка допущена в Лемме 11 и заключается в некорректном повторном применения Леммы 7.

Указанная теорема также является важной в рамках философско-эпистемического проекта, разрабатываемого Д.Льюисом в [6] и посвященного исследованию контрафактических рассуждений.

Несмотря на отсутствие доказательства полноты и финитной аппроксимируемости указанного класса логик в окрестностной семантике, существует алгебраическое доказательство этого же факта, представленное в работе Тимоти Сюрендонка [5].

В процессе доказательства Д.Льюис использовал метод канонических моделей, а также метод фильтрации.

Определение 2. Каноническая модель логики L – это $M_L = \langle W_L, N_L, V_L \rangle$, где:
1. $W_L = \{\mathit{\Gamma} \mid \mathit{\Gamma}$ – максимальное L – непротиворечивое множество$\}$;
2. $\forall \mathit{\Gamma} \in W_L \forall \varphi \in Fm : |\varphi|_L \in N_L(\mathit{\Gamma}) \Leftrightarrow \Box\varphi \in \mathit{\Gamma}$;
3. $\forall p \in Var,\ V_L(p) = |p|_L$.

Фильтрация определяется посредством введения классов эквивалентности по отношению $\sim_\Sigma$, где Σ – множество формул. $w \sim_\Sigma v$ тогда и только тогда, когда в w и v истинны одни и те же формулы из Σ. Соответственно $\widetilde{w}_\Sigma = \{v \mid w \sim_\Sigma v\}$ и $\widetilde{X}_\Sigma = \{\widetilde{w}_\Sigma \mid w \in X\}$. Множество Σ называется замкнутым по подформулам, если для любой формулы $\varphi \in \Sigma$ все подформулы φ принадлежат Σ.

Определение 3. Пусть $M = \langle W, N, V \rangle$ - окрестностная модель и Σ - множество формул, замкнутое по подформул. Фильтрацией модели M через множество формул Σ будем называть модель $M_f = \langle W_f, N_f, V_f \rangle$ такую, что:
1. $W_f = \widetilde{W}$;
2. $\forall w \in W \forall \Box\varphi \in \Sigma : |\varphi|_M \in N(w) \Leftrightarrow \widetilde{|\varphi|}_M \in N_f(\widetilde{w})$;
3. $\forall p \in Var : V(p) = \widetilde{V}(p)$.

Можно доказать вариант теоремы Д.Льюиса для частных случаев модальных логик, например для логик $L_1 = E + \Box\varphi \to \varphi, L_2 = E + \varphi \to \Box\varphi, L_3 = E + (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi), L_4 = E + \Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\varphi$ и любых их объединений. E обозначает минимальную модальную логику состоящую из множества всех пропозициональных тавтологий, замкнутых по правилам $(MP)\ \varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi, (RE)\ \varphi \leftrightarrow \psi \vdash \Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi$.

В работе установлена верность следующей теоремы:

Теорема 2.

Пусть L – модальная логика из множества $\{L_1, L_2, L_3, L_4\}$ или представляется в виде объединения некоторых из этих логик. Тогда L полна и финитно аппроксимируема.

Источники и литература

1) Scott, D. Advice in modal logic. In Philosophical Problems in Logic: Some Recent Developments, 143-173. D. Reidel, 1970.
2) Montague, R. Universal grammar. Theoria 36, 373-398, 1970.
3) Lewis, D. Intensional logics without iterative axioms. Journal of Philosophical Logic 3, 457 – 466, 1974.
4) Pacuit, E. Neighborhood Semantics for Modal Logic. Springer, 2017.
5) Surendonk, T.J. Canonicity for Intensional Logics Without Iterative Axioms. Journal of Philosophical Logic 26, 391–409,1997.
6) Lewis, D. Counterfactuals. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1973.