Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

**Инвариантные нормы Ляпунова на плоскости**

**Научный руководитель – Протасов Владимир Юрьевич**

***Мусаева Асият Магомедовна***
*Студент (специалист)*
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
*E-mail: asya.musaeva2001@mail.ru*

Линейной системой с переключениями называется линейное дифференциальное уравнение $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t)$ на вектор-функцию $\boldsymbol{x} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ с начальным условием $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, в котором матрица $A(t)$ принимает произвольные значения из заданного компактного множества $\mathcal{A}$. *Функция управления*, или *правило переключений* (switching law) – это произвольная измеримая функция $A : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{A}$ со значениями в пространстве $d \times d$-матриц. Линейные системы с переключениями естественным образом возникают в задачах электроники, механики, робототехники, планирования, и т.д. [3]. Один из главных вопросов – максимальный рост траекторий системы и её устойчивость. *Показателем Ляпунова* $\sigma(\mathcal{A})$ системы называется инфимум чисел $\alpha$, для которых $\|\boldsymbol{x}(t)\| \le C\, e^{\alpha t}\|\boldsymbol{x}_0\|, \quad t \in [0, +\infty)$. Таким образом, самый быстрый рост траектории имеет порядок $C\, e^{\sigma t}, t \to \infty$. Система называется *асимптотически устойчивой*, если все её траектории стремятся к нулю при $t \to \infty$. Известно [4], что система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда $\sigma < 0$. Наилучшим инструментом для исследования роста траекторий является *инвариантная норма Ляпунова*, которая определяется следующим свойством: $\|\boldsymbol{x}(t)\| \le e^{\sigma\, t}\,\|\boldsymbol{x}_0\|$ для любой траектории $\boldsymbol{x}(t)$, и при этом для любой точки $\boldsymbol{x}_0$ существует траектория $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ такая, что $\tilde{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{x}_0$ и $\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\| = e^{\sigma\, t}\,\|\boldsymbol{x}_0\|$. Н.Барабанов [1] доказал, что для любой неприводимой системы с выпуклым множеством управления $\mathcal{A}$ инвариантная норма Ляпунова существует. Однако, её построение – чрезвычайно сложная задача (см. подробнее [2]). Мы представляем полное решение этой задачи в случае $d = 2$. Оказывается, что для двумерных систем можно не только эффективно вычислять показатель Ляпунова, но и строить норму Ляпунова в явном виде. Мы приводим соответствующий алгоритм и численные примеры. Более того, мы получаем полную классификацию норм Ляпунова для двумерных систем. Интересно, что в некоторых случаях инвариантные нормы не единственны, что подчеркивает разницу с дискретными системами [5].

**Источники и литература**

1) N.E. Barabanov, *Absolute characteristic exponent of a class of linear nonstationary systems of differential equations*, Siberian Math. J. 29 (1988), 521–530.

2) N. Guglielmi, L. Laglia, and V.Yu. Protasov, *Polytope Lyapunov functions for stable and for stabilizable LSS*, Found. Comput. Math., 17 (2017), no 2, 567–623.

3) D. Liberzon, *Switching in systems and control*, Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

4) A. P. Molchanov and Y. S. Pyatnitskiy, *Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory*, Systems Control Lett., 13 (1989), no 1, 59–64.

5) V.Yu. Protasov, *The Barabanov norm is generically unique, simple, and easily computed*, to apper is SIAM J. Optimiz. Control. (2022), arXiv:2109.12159.