Секция «Геометрия и топология»

Построение многочленов в биинволюции для сингулярных элементов коалгебры Ли

Научный руководитель – Ошемков Андрей Александрович

Лобзин Фёдор Игоревич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: fiadat.54@gmail.com

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, соответственно $\mathfrak{g}^*$ — сопряженное пространство. Рассмотрим на $\mathfrak{g}^*$ структуру:

$$\mathcal{A}_x(x) = (c_{ij}^k x_k),\ x \in \mathfrak{g}^*$$

Данный тензор определяет скобку Пуассона — Ли на $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$: $\{f,g\}(x) = \mathcal{A}_x(df(x), dg(x)$. Функции $f \in C^\infty$, лежащие в ядре скобки Пуассона — Ли, называются функциями Казимира. Так же можно рассмотреть похожую структуру, называемую скобкой с замороженным аргументом:

$$\mathcal{A}_a(x) = (c_{ij}^k a_k),\ a, x \in \mathfrak{g}^*, \quad \{f,g\}_a(x) = \mathcal{A}_a(df(x), dg(x))$$

Алгебра Ли называется вполне интегрируемой, если на ней найдется полный набор функций, находящихся в инволюции относительно скобки Пуассона — Ли. Полным считается набор, содержащий в себе n функционально независимых функций, где n определяется формулой:

$$n = \frac{1}{2}(dim\ \mathfrak{g} + ind\ \mathfrak{g}).$$

Наибольший практический интерес представляют наборы, состоящие из многочленов. Во второй половине прошлого века была сформирована гипотеза, касающиеся существования полных наборов в инволюции.

Гипотеза Мищенко — Фоменко.[доказана]

На двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует полный набор полиномов в инволюции относительно $\{\cdot,\cdot\}$.

Для построения таких наборов удобно пользоваться методом сдвига аргумента. Отметим, что получившиеся сдвигом наборы будут также в инволюции и относительно скобки с замороженным аргументом, так что интересно рассмотреть естественное обобщение этой гипотезы, предложенное в [1].

Обобщенная гипотеза Мищенко — Фоменко. Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для всех регулярных a из коалгебры на $\mathfrak{g}^*$ существует полный набор полиномов в биинволюции, то есть набор, одновременно находящийся в инволюции относительно $\{\cdot,\cdot\}$ и $\{\cdot,\cdot\}_a$.

Полученные при применении метода сдвига аргумента наборы являются полными не для всех алгебр Ли. Также эти наборы функционально независимы не для всех a. Первая гипотеза была доказана Садэтовым в 2004 году (см.[2]), но полученные его алгоритмом наборы не всегда оказываются в инволюции относительно скобки с замороженным аргументом. Обобщенная гипотеза Мищенко—Фоменко доказана, например, для полупростых алгебр Ли (см.[1]). Несмотря на то, что обобщенная гипотеза была сформулирована только для регулярных сдвигов, в данной работе эта задача рассмотрена и для сингулярных сдвигов тоже.

Существует критерий, по которому можно определить полноту семейства, построенного сдвигом аргумента:

Теорема 1 Критерий Болсинова.

Семейство многочленов, полученных сдвигом на элемент a полно тогда и только тогда, когда существует прямая $x+\lambda a$, которая не пересекает множество сингулярных элементов.

В работе рассмотрено обобщение этой теоремы:

Теорема 2.

Набор порождающих для семейства функций, полученных сдвигом вдоль элемента $a \in \mathfrak{g}^*$, состоит из

$$\frac{dim\ \mathfrak{g} - dim(Ann(a))}{2}$$

функций тогда и только тогда, когда

1) *Существует $x \in \mathfrak{g}^*$ такой, что плоскость, натянутая на x, a, без прямой λa состоит только из регулярных элементов,*
2) *$ind(Ann(a)) = ind\ \mathfrak{g}$.*

При помощи него был получен метод построения полных биинволютивных наборов для сингулярных элементов алгебры Ли:

Теорема 3.

Пусть для некоторого сингулярного a из коалгебры Ли верны условия теоремы 2. Тогда набор многочленов, полученных сдвигом на a, дополняется инволютивным набором для $Ann(a)$ до полного набора в биинволюции.

Следствием этой теоремы является, например, тот факт, что на всех полупростых алгебрах Ли существуют полные наборы в биинволюции для всех сингулярных элементов.

Источники и литература

1) 1. *Bolsinov A. V., Zhang P.* Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras //Transformation Groups. – 2016. – Т. 21. – №. 1. – С. 51-86.
2) 2. *Sadetov S. T.* A proof of the Mishchenko-Fomenko conjecture //Doklady Mathematics. – Pleiades Publishing, Ltd. (Плеадес Паблишинг, Лтд), 2004. – Т. 70. – №. 1. – С. 635-638.