Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Асимптотические свойства выпуклых оболочек случайных блужданий. Моделирование.

Мыслюк Александр Олегович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: sanya.mysliuk@mail.ru

Исследование асимптотических свойств выпуклых оболочек случайных множеств точек началось в 60-е годы со статьи Альфреда Реньи и Рольфа Саланке. Ими были рассмотрены основные характеристики плоской выпуклой оболочки равномерно распределённых точек в некоторых выпуклых областях, а также для нормального распределения точек на плоскости. Дальнейшие аналитические результаты для многомерных случаев были получены рядом авторов, из которых хочеся отметить результаты, опубликованные Ирен Хойтер в 1999 году. Параллельно изучались асимптотические свойства выпуклых оболочек случайных блужданий. В этом направлении основные результаты связаны с именами Глена Бакстера, Спицера, Видома. Целью нашей работы является изучение асимптотик математического ожидания числа E_n – $(d-1)-$мерных граней выпуклой оболочки случайного блуждания в $\mathbb{R}^d$. Для дальнейшенго изложения нам потребуется результат Бакстера 1961 года (**[1]**).

Пусть $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ – векторы на плоскости. $A = \{i_1, \dots, i_k\}$, $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$. $Z_A := \sum\limits_{j=1}^{k} Z_{i_j}$. Тогда если Z_A коллинеарен Z_B, то $A = B$. Это условие будем обозначать (**B**). Комбинаторная лемма Бакстера формулируется следующим образом: Пусть векторы $Z_1, \dots, Z_n$ удовлетворяют (**B**), $S_0 = 0, S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Z_j$. Существует ровно одна циклическая перестановка векторов $Z_1, \dots, Z_n$, такая что $S_1, \dots, S_{n-1}$ лежат справа (слева) относительно прямой S_0S_n.

Применение комбинаторной леммы к случайным блужданиям, скачки которых удовлетворяют (**B**) для всякого n с вероятностью 1, даёт асимптотику: $E_n = 2 \ln n + O(1)$.

Идеи Бакстера развились в работе Д. Запорожца, В. Высотского 2018 года, см. **[2]**. Они обобщили асимптотику на случай произвольной размерности d, налагая на скачки следующее условие (**H**):

$$\mathbb{P}(Z_i \in h) = 0 \text{ для любой гиперплоскости } h.$$

С целью обобщения комбинаторной леммы в нашей работе было сформулировано новое условие (**K**), являющееся обобщением условия (**B**) на случай произвольной размерности d. Сформулируем условие (**K**):

Пусть $B_1, \dots, B_{d-1}$ – подмножества индексов, такие что $B_1 \subset \dots \subset B_{d-1}$, векторы $Z_1, \dots, Z_n$ удовлетворяют условию (K), если:
1) Векторы $Z_{B_1}, \dots, Z_{B_{d-1}}$ линейно независимы;

2) Для всякого подмножества индексов A, отличного от $B_1, \ldots, B_{d-1}$ верно, что $Z_A \neq Z_{B_i} - Z_{B_j}$ ни для каких $j \leq i$. Причём векторы $Z_A, Z_{B_1}, \ldots, Z_{B_{d-1}}$ линейно независимы.

Оказалось, что выполнение условия $(\mathbf{K})$ с вероятностью 1 эквивалентно $(\mathbf{H})$: $\mathbb{P}((\mathbf{K})) = 1 \Leftrightarrow (\mathbf{H})$

Используя новое условие $(\mathbf{K})$, мы сформулировали и доказали обобщение комбинаторной леммы на случай произвольной размерности d и, как следствие, получили асимптотики для E_n, ранее полученные в **[2]**.

Лемма. (Обобщенная комбинаторная лемма.) Пусть векторы $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ удовлетворяют $(\mathbf{K})$, $B = \{0, i_1, \ldots, i_{d-2}, n\}$ – некоторый упорядоченный поднабор индексов. $A := \{Z_{i_k+1}, \ldots, Z_{i_{k+1}}\}$ для некоторого $0 \leq k \leq d-2$. Тогда существует ровно одна циклическая перестановка σ векторов из A, такая что ломанная, соединяющая точки S_{i_k} и $S_{i_{k+1}}$ будет полностью лежать в правом (левом) полупространстве относительно гиперплоскости Ω, проходящей через точки $\{0, S_{i_1}, \ldots, S_{i_{d-2}}, S_{i_n}\}$.

Теорема. Пусть скачки удовлетворяют условию $(\mathbf{K})$ с вероятностью 1, тогда:

$$E_n = 2(\ln n + C)^{d-1} + o(1),$$

где C – константа Эйлера.

С целью проверки аналитических результатов было проведено компьютерное моделирование, некоторые частные результаты которого представлены в работе. Все новые и старые аналитические результаты получили подтверждение в двух принципиально разных случаях: на плоскости и в $\mathbb{R}^d, d > 2$ на примере $\mathbb{R}^3$.

Источники и литература

1) Baxter, G. (1960). A combinatorial lemma for complex numbers. Air Research and Development Command, Office of Scientific Research, US Air Force.
2) Vysotsky, V., Zaporozhets, D. (2018). Convex hulls of multidimensional random walks. Transactions of the American Mathematical Society, 370(11), 7985-8012.