Задача максимизации средней суммарной силы выживших в сражении для модели игры гладиаторов

Ходякова Мария Александровна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: khodyakova.mari@mail.ru

В работе рассматривается задача максимизации средней суммарной силы выживших для модели игры гладиаторов, также известной, как игра полковника Блотто, введённая Борелем в [1]. Каминским, Люксом и Нельсоном ([2]) в 1984 году была сформулирована следующая модель. У двух игроков есть команды гладиаторов численностью n и m соответственно. Каждый гладиатор характеризуется неотрицательным параметром, который мы будем называть силой. Гладиаторы с нулевой силой не рассматриваются. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ – вектор сил первой команды, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ – второй команды. На первом шаге команды выбирают по одному гладиатору и выставляют сражаться друг с другом. Вероятность победы гладиатора прямо пропорциональна его силе, то есть гладиатор с силой a_i выиграет гладиатора с силой b_j с вероятностью

$$\frac{a_i}{a_i + b_j}.$$

Победивший гладиатор возвращается в состав команды, сохраняя силу неизменной, а проигравший выбывает из состава команды. На втором шаге команды вновь выставляют по одному гладиатору, возможно, уже участвовавшему в поединке прежде. Игра заканчивается, когда в одной из команд сумма сил гладиаторов, которую мы будем называть *суммарной силой*, становится нулевой. Будем считать, что команда, у которой по окончании игры суммарная сила не равна нулю, является победителем в игре. Отдельные поединки назовём боями, игру – *сражением двух команд*.

Рассмотрим аналогичную постановку игры, в которой участвуют не два, а n игроков, обладающих командами гладиаторов численностью $m_1, m_2, \dots, m_n$ соответственно. Пусть у i-ой команды вектор сил $\mathbf{a_i} = (a_{i,1}, \dots, a_{i,m_i})$. На первом шаге команды выбирают по одному гладиатору и ставят их всех вместе сражаться. Будем считать, что гладиатор с силой a_{i,k_i} проигрывает в бою с гладиаторами с силами a_{j,k_j}, $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$, с вероятностью

$$\frac{1/a_{i,k_i}}{1/a_{1,k_1} + 1/a_{2,k_2} + \dots + 1/a_{n,k_n}}.$$

После боя $n-1$ гладиатор возвращаются в составы своих команд, сохраняя силу неизменной, а проигравший выбывает из состава команды. На втором шаге команды вновь выставляют по одному гладиатору, возможно, уже участвовавшему в боях прежде. Игра заканчивается, когда в $n-1$ команде из n команд не остаётся гладиаторов. Оставшуюся команду с отличной от нуля суммарной силой будем считать победителем в игре. Игру будем называть *сражением n команд*.

Каминский ([2]) доказал, что вероятность победы команды зависит только от распределения сил и не зависит от порядка выступлений гладиаторов в боях. В.В.Харламову ([3]) удалось расширить этот результат и, в частности, показать, что средняя суммарная сила команды тоже не зависит от порядка выступлений гладиаторов в боях.

Ринотт ([4]) в 2012 году сформулировал оптимизационную задачу о распределении сил между гладиаторами в модели Каминского. Пусть команда обладает суммарной силой a, тогда мы можем представить эту силу в виде суммы неотрицательных чисел

$$a = a_1 + \cdots + a_n,$$

где n – количество гладиаторов в команде, a_i – сила i-го гладиатора. Ринотт исследовал задачу максимизации первой командой вероятности ее победы. В работе [4] был описан спектр возможных стратегий для каждой команды, однако не было указано, какую из них нужно выбирать в явном виде. Мы же рассмотрим аналогичную задачу, когда команда максимизирует оставшуюся у нее в конце сражения суммарную силу. Мы покажем, что в этом случае стратегия однозначна – нужно концентрировать все силы в одном гладиаторе как в сражении двух команд, так и в сражении n команд вне зависимости от действий противника.

Теперь допустим, мы имеем заданное ограничение на количество поражений, но в каждом бою можем выставлять любую силу, которая не больше суммарной силы команды, не деля её между гладиаторами до начала боя. Будем называть такие игры *сражением с перераспределениями двух команд* и *сражением с перераспределениями n команд*. В этом случае результат, вообще говоря, зависит от порядка выступлений гладиаторов в боях, и нетривиально указать стратегию, оптимальную при заданной стратегии соперника. Однако, когда все команды хотят максимизировать свои ресурсы по окончании сражения, удаётся найти единственное равновесие Нэша в случае двух команд или одно из таких равновесий в случае n команд и показать, что таким равновесием является каждой команде вложить суммарную силу в одного гладиатора.

Список литературы

[1] Borel, Emile, La théorie du jeu et les équations intégralesa noyau symétrique // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. – 1921. – Vol. 173, no. 1304-1308. – P.58.

[2] K. S. Kaminsky and E. M. Luks and P. I. Nelson, Strategy, nontransitive dominance and the exponential distribution // Australian Journal of Statistics. – 1984. – Vol. 26, no. 2. – P.111-118.

[3] В.В. Харламов, Обобщённая модель стохастической игры полковника Блотто // Дискретная математика. – 2022 (в печати).

[4] Rinott Y., Scarsini M., Yu Y., A Colonel Blotto gladiator game // Mathematics of Operations Research. – 2012. – Vol. 37, no. 4. – P.574-590.