Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

О покрытии плоских множеств

Толмачев Александр Дмитриевич
Студент (бакалавр)
Московский физико-технический институт, Москва, Россия
E-mail: sashasarov2000@mail.ru

Пусть F - произвольное ограниченное множество на плоскости, $n \in \mathbb{N}$. Определим следующую величину:

$$d_n(F) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : \exists F_1, \ldots, F_n : F \subseteq F_1 \cup \ldots \cup F_n,\ \forall i \operatorname{diam}(F_i) \leq x\}.$$

Другими словами, среди всех покрытий множества F некоторыми n множествами $F_1, \ldots, F_n$ мы хотим выбрать покрытия, состоящие из множеств как можно меньшего диаметра. Заметим, что величина $d_n(F)$ не изменится, если потребовать, чтобы все множества покрытия были выпуклыми и замкнутыми. Для произвольного F последовательность $d_n(F)$ являются невозрастающей, так как можно положить $F_{n+1} = \emptyset$.

Определим величину $d_n = \sup\ d_n(F)$, где супремум берется по всем множествам F единичного диаметра на плоскости. Из сделанного выше замечания ясно, что последовательность d_n не возрастает. Исследование величин d_n глубоко мотивировано классической проблемой Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра (см. [3]).

Рассматриваемую задачу можно представить как задачу оптимизации. Пусть $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Omega_k \subset \mathbb{R}^2$ — некоторое покрытие выпуклого многоугольника Ω выпуклыми многоугольниками Ω_k; $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ — границы $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ соответственно; $X = \{x_j\}$ — вершины разбиения; $x_j,\ j \in I_k$ — вершины Ω_k. Пусть $E = \{(p, q) \mid \quad x_p \in \Gamma_q\}$ определяет принадлежность вершин разбиения граням Ω. Тогда

$$F(X) = \max_k \max_{i,j \in I_k} \|x_i - x_j\| \to \min, \tag{1}$$

$$x_p \in \Gamma_q \quad \forall (p, q) \in E,$$

есть задача условной оптимизации с кусочно-гладкой целевой функцией и линейными ограничениями.

Нам удалось существенно усилить многие из предшествующих результатов (см. [1, 2, 4]). Для улучшения верхних оценок был использован метод универсальных покрывающих систем и алгоритм поиска оптимальных разбиений плоских множеств. Кроме того, были получены верхние и нижние оценки величины d_n в случае обобщения данной задачи на случай разбиения поверхности двумерного тора как факторпространства $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Источники и литература

1) Толмачев А. Д., Протасов Д. С. О покрытии плоских множеств / Доклады Российской Академии Наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021, том 499. стр. 44 - 48.
2) Tolmachev A. D., Protasov D. S. Covering planar sets / Doklady Mathematics. 2021, v. 104, p. 196–199.
3) Borsuk K. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre / Fundamenta Math. 1933. v. 20. p. 177 - 190.
4) Protasov D., Tolmachev A., https://github.com/vosatorp/partitions.