

**Многопоточный алгоритм Холмса для расчета гравитационных сил****Научный руководитель – Жаров Владимир Евгеньевич*****Шайхутдинов Альберт Рузалевич****Аспирант*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Физический факультет, Кафедра небесной механики, астрометрии и гравиметрии, Москва, Россия

*E-mail: ar.shaykhtudinov@physics.msu.ru*

Практически во всех задачах баллистики космических аппаратов (КА) гравитационная сила является преобладающей. Гравитационное поле неточечных объектов традиционно представляется в виде разложения в ряд по шаровым функциям, то есть в виде набора коэффициентов Стокса.

Для полностью нормированных коэффициентов Стокса гравитационный потенциал определяется формулой [1]:

$$V = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\sin \psi)$$

В методе Холмса, для варианта с внешней суммой по  $m$  (рекурсия "по колонкам"), используется следующая формула [1]:

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r} \sum_{m=0}^M \left[ \cos(m\lambda) \sum_{n=\mu}^N \left(\frac{a_e}{r}\right)^n C_{nm} \bar{P}_{nm}(\sin \psi) + \sin(m\lambda) \sum_{n=\mu}^N \left(\frac{a_e}{r}\right)^n S_{nm} \bar{P}_{nm}(\sin \psi) \right]$$

где

$$\mu = \max(2, m)$$

Отличительной особенностью метода Холмса является инициализация рекуррентной последовательности присоединенных функций Лежандра с  $n = m$ . Поэтому метод Холмса в отличие от ряда других известных методов [2], [3] не имеет вычислительных недостатков, связанных с ограничением типа IEEE double при вычислении ПФЛ высоких порядков  $m > 2700$ . Например, в методе Беликова для  $\psi = 89$  и  $M = 2700$  нормированное значение  $\bar{P}_{mm}(\sin \psi) \sim 10^{-4747}$ , что значительно превышает точность IEEE double.

Также этот метод показал отличные результаты при расчете приполярных значений потенциала – вплоть до  $\pm 89.999999$  по широте никаких вычислительных проблем не наблюдается [4], несмотря на то, что разложение гравитационного потенциала по сферическим функциям имеет особенность в полюсах.

Таким образом, метод Холмса является одним из предпочтительных методов для работы с современными моделями гравитационного поля, которые могут включать в себя гармоники вплоть до 2190 порядка [5].

Расчет гравитационного поля с учетом большого числа гармоник является вычислительной дорогой задачей, так расчет одного витка орбиты с учетом полной модели EGM2008 может занимать вплоть до 15 минут на персональном компьютере [4].

В рамках данной работы разработан многопоточный алгоритм Холмса, позволяющий значительно ускорить расчеты и решать вычислительно дорогие задачи даже на персональном компьютере. Для эффективной параллелизации определены параметры разбиения общей суммы на частичные суммы в зависимости от общего числа CPU.

Сам алгоритм реализован на языке C++17 (C++20) с использованием функций и шаблонов стандартной библиотеки без платформа-зависимых решений, что позволяет использовать его на всех популярных операционных системах.

В заключении проводится сравнение результатов тестирования с программным обеспечением GMAT, разработанным NASA [6].

### Источники и литература

- 1) Holmes S. A., Featherstone W. E. A unified approach to the clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated legendre functions // Journal of Geodesy. 2002. Vol. 76. P. 279-299.
- 2) Беликов М. В., Тайбаторов К. А. Эффективный алгоритм вычисления гравитационного потенциала Земли и его первых производных для решения спутниковых задач // Кинематика и физика небес. тел. 1990. Т. 6. С. 24–32.
- 3) Cunningham L. E. On the computation of the spherical harmonic terms needed during the numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite // Celestial mechanics. 1970. Vol. 2. P. 207-216.
- 4) Kuga H., Carrara V. Fortran-and c-codes for higher order and degree geopotential and derivatives computation // The Brazilian Symposium on Remote Sensing. 2013.
- 5) The development and evaluation of the earth gravitational model 2008 (egm2008) / N. Pavlis, Simon Holmes, Steve Kenyon, Jyzel Factor // Journal of Geophysical Research. 2012. 04. Vol. 118.
- 6) Goddard Space Flight Center. General Mission Analysis Tool (GMAT). 2016. Access mode: <https://software.nasa.gov/software/GSC-17177-1>.