Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Пропускная способность квантовых каналов порождённых проективными унитарными неприводимыми представлениями конечных групп

Научный руководитель – Амосов Григорий Геннадьевич

Рыскин Лев Андреевич
Студент (магистр)
Московский физико-технический институт, Москва, Россия
E-mail: ryskin.la@phystech.edu

Квантовый канал, как известно, можно представить в виде: $\Phi[\rho] = \sum_{i=1}^{D} V_j \rho V_j^*$, где операторы Крауса V_j и V_j должны удолетворять условию: $\sum_{i=1}^{D} V_j^* V_j = Id$. Его важной характеристикой является классическая пропускная способность, которая по квантовой теореме кодирования вычисляется с помощью величины Холево: $C(\Phi) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\chi(\Phi^{\otimes n})}{n}$ где величина Холево равна: $\chi(\Phi) = \sup\limits_{\{\pi_i,\rho_i\}} \left(S\Big(\sum \pi_i \rho_i\Big) - \sum \pi_i S(\rho_i) \right)$, где $S(\rho) = -Tr\rho\log\rho$-S - энтропия фон Неймана. В ковариантных каналах формула для величины Холево упрощается: пусть на конечной или компактной группе G дано неприводимое проективное унитарное представление U_g и канал ковариантный: $\Phi(U_g \rho U_g^*) = U_g \Phi(\rho) U_g^*$. В этом случае задача вычисления величины Холево сводится к нахождению минимальной выходной энтропии: $\chi(\Phi) = S\Big(\Phi\Big(\frac{I}{n}\Big)\Big) - \inf\limits_{\rho} S(\Phi(\rho))$. Если дано проективное унитарное представление конечной группы G и распределение вероятностей на этой группе $\{\pi_g\}$, то можно построить канал $\Phi_G[\rho] = \sum\limits_{g\in G} \pi_g U_g \rho U_g^*$[1].

Теорема 1[2]. Пусть T нормальная абелева подгруппа в группе G, порядок T равен n, а порядок $|G| = n^2$, где $n = dim(H)$. Отображение $g \to U_g$ задаёт неприводимое проективное унитарное представление группы G, а сужение этого представления на T- унитарное представление группы T. И пусть квантовый канал Φ_G, построенный по распределению $\{\pi_g\}$ и представлению U_g, является ковариантным и выполнено условие мажоризации: пусть распределение на фактор группе упорядоченно: $\pi_{[g_1]} \geq \pi_{[g_2]} \ldots \pi_{[g_n]}$, где $\pi_{[g]} = \sum\limits_{t\in T} \pi_{gt}$, тогда распределение на группе G удовлетворяет условию мажоризации, если верно: $l > k \implies \pi_{g_j t} \leq \pi_{g_k s} \forall s,t \in T$. Тогда классическая пропускная способность $C(\Phi) = \chi(\Phi) = \log n + \sum_{i=1}^{n} \pi_{[g_i]} \log \pi_{[g_i]}$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 можно не требовать ковариантность квантового канала, которая при неабелевости группы G верна не всегда.

Примеры. Пусть M - подгруппа в группе перестановок S_n, тогда M естественно действует на $\mathbb{Z}_n = T$. $\{\chi_i\}$-множество характеров T (они могут совпадать). Тогда задание операторов $W_t|j\rangle = \chi_j(t)|j\rangle$ и $V_s|j\rangle = |s(j)\rangle$ даёт проективное представление группы $M \times \mathbb{Z}_n$. *Автор благодарит профессора Г.Г. Амосова (МИАН) за научную и образовательную помощь при написании данной работы.*

Источники и литература

1) Holevo A. S. Quantum systems, channels, information: a mathematical introduction. – Walter de Gruyter, 2019.

2) Amosov G. G. On capacity of quantum channels generated by irreducible projective unitary representations of finite groups //Quantum Information Processing. 2022. Т. 21. №. 2. С. 81.