Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Расширение обобщенной меры Лебега-Фейнмана-Смолянова-Шамарова на гильбертовом пространстве

Шелаков Михаил Григорьевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия
E-mail: shelakov.mikhail@mail.ru

[12pt]article [utf8]inputenc [english, russian]babel amsfonts deffОпределение[section] exampleПример[section] remarkЗамечание[section] prepПредложение[section] lemmaЛемма[section] theoremТеорема[section]

Расширение обобщенной меры Лебега-Фейнмана-Смолянова на гильбертовом пространстве

М. Г. Шелаков
E-mail: shelakov.mikhail@mail.ru

Посвящается памяти Олега Георгиевича Смолянова

Как известно, на бесконечномерном гильбертовом пространстве не существует счетно-аддитивной сигма-конечной локально конечной ненулевой трансляционно-инвариантной борелевской неотрицательной меры (теорема Андре Вейля, [1]). По этой причине для формализации континуальных интегралов Фейнмана ([2]) приходится вводить обобщенную трансляционно-инвариантную меру (Лебега-Фейнмана в смысле определения из [2]) как линейный функционал на некотором пространстве функций. В данном сообщении предлагается естественное расширение одного из таких функционалов, введенного в статье [3] и названного там обобщенной мерой Лебега (и далее называемого (обобщенной) мерой Лебега-Фейнмана-Смолянова). Такое расширение позволяет придать точный математический смысл квантованию по Шредингеру нецилиндрических гамильтонианов для гамильтоновых систем с бесконечным числом степеней свободы ([3]): в частности, дать корректное математическое решение проблемы бесконечной энергии вакуума при бозонном квантовании "свободного" электромагнитного поля [1]; сами же инвариантные меры недавно были использованы для математического описания явления квантовых аномалий ([4], [5], [6]).

Структура статьи следующая: в первом разделе приводится предварительное расширение меры Лебега-Фейнмана-Смолянова, с помощью которого во втором разделе рассматривается запас квадратично-интегрируемых функций по такой мере, опираясь на который строится расширение меры Лебега-Фейнмана-Смолянова на более удобное в работе пространство, нежели в первом разделе.

1. Обобщённая мера Лебега на гильбертовом пространстве

Пусть Q - вещественное сепарабельное гильбертово пространство, не обязательно бесконечномерное (это важно при реализации в [3] идеи о том, что вторичное квантование

[1] https://matem.anrb.ru/sites/default/files/program22.pdf

на уровне формул приводится к виду, неотличимому от "первичного"). Меру Лебега на конечномерном евклидовом пространстве K будем обозначать символом λ_K, и под интегрированием по Лебегу по K далее понимается интегрирование по этой мере.

Борелевскую функцию $f : Q \to \mathbb{C}$ назовем интегрируемой по обобщенной мере Лебега на Q, если она интегрируема по Лебегу по любому конечномерному подпространству в Q, и существует такое число $I \in \mathbb{C}$, что для любой последовательности конечномерных подпространств $\{L_m\}$, таких что $L_k \subset L_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}$ и $\cup_{m=1}^{+\infty} L_m$ всюду плотно в Q, $\exists \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{L_m} f(q)\lambda_{L_m}(dq) = I$. Будем в этом случае применять обозначение $I = \int\limits_Q f(q)\lambda_Q(dq)$, а множество всех таких функций обозначать $B_1(Q)$. Обобщенной мерой Лебега будем называть линейный функционал $\lambda_Q : B_1(Q) \to \mathbb{C}$, определяемый равенством $\lambda_Q(f) = \int\limits_Q f(q)\lambda_Q(dq)\ \forall f \in B_1(Q)$. Для всевозможных сужений функционала λ_Q на подпространства $B_1(Q)$ оставим те же обозначения.

Отметим, что в случае конечномерного Q два смысла обозначения интеграла по λ_Q согласованы, хотя в этом случае в пространство $B_1(Q)$ войдут не все борелевские функции на Q, интегрируемые по Лебегу.

Ниже будет показано, что одним из сужений меры λ_Q является мера Лебега-Фейнмана-Смолянова, введенная в статье [3] и являющаяся линейным функционалом на пространстве, содержащем некоторые бесконечно дифференцируемые по Фреше функции на Q.

В некоторых работах Сакбаева В.Ж. [7], [8], а также Сакбаева В.Ж. и Смолянова О.Г. [9] предлагается иное пространство функций, интегрируемых по обобщенной мере Лебега, по-видимому, не содержащее ненулевых бесконечно дифференцируемых.

Из определения 1.1 очевидным образом следует простое свойство.

Свойство интегрируемых по обобщенной мере Лебега функций. Пусть f и g - интегрируемые по λ_Q функции, причем $f \le g$. Тогда $\int\limits_Q f(q)\lambda_Q(dq) \le \int\limits_Q g(q)\lambda_Q(dq)$.

Такое определение обобщенной меры Лебега кажется естественным, однако в случае бесконечномерного Q эта мера будет обладать многими свойствами, которых нет в конечномерном случае. Например, существует всюду гладкая и положительная функция, интеграл от которой равен 0, как показывает следующий пример.

Пример Сакбаева (устное сообщение). Пусть $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, dim\ Q = \infty$. Тогда функция $e^{-(\pi+\alpha)||q||^2}$ интегрируема по λ_Q, причем $\int\limits_Q e^{-(\pi+\alpha)||q||^2} \lambda_Q(dq) = 0$.

Действительно, $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(\pi+\alpha)x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\pi+\alpha}} < 1$. Если $\{L_m\}$ последовательность конечномерных подпространств из определения интегрируемой функции, $dim(L_m) = d_m$, то $\int\limits_{L_m} e^{-(\pi+\alpha)||q||^2}\lambda_{L_m}(dq) = (\sqrt{\frac{\pi}{\pi+\alpha}})^{d_m} \to 0$ при $m \to \infty$.

Всюду далее Q бесконечномерно.

Введем обозначения, которые в дальнейшем будут часто использоваться. Пусть K - замкнутое подпространство $Q, q \in Q$. Обозначим $q_K = P_K(q)$, где P_K - ортогональный проектор в пространстве Q на подпространство K. Ортогональное дополнение пространства K будем обозначать $K^\perp$.

В статье [3] вводится другое определение обобщенной меры Лебега. Мы назовем эту меру мерой Лебега-Фейнмана-Смолянова. Однако ее расширение, которое мы далее построим в следующем разделе, по-прежнему будем называть обобщенной мерой Лебега.

([3]) Будем говорить, что функция $f : Q \to \mathbb{C}$ принадлежит множеству $C_1(Q)$, если существует такое конечномерное подпространство K и непрерывная функция $\phi : K \to \mathbb{C}$, произведения которой на полиномы являются ограниченными функциями, что $f(q) = \phi(q_K)e^{-\pi||q_{K^\perp}||^2}$. В этом случае скажем, что функция f интегрируема по обобщенной мере Лебега-Фейнмана-Смолянова (или C_1 - интегрируема), и значение интеграла по этой мере равно $\int\limits_K \phi(q_K)\lambda_K(dq_K)$, а саму обобщенную меру определим как линейный функционал на $C_1(Q)$, принимающий на элементе f значение $\int\limits_K \phi(q_K)\lambda_K(dq_K)$.

Определение 1.1 обобщает определение 1.2, что доказывает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f \in C_1(Q)$, т.е. $f(q) = \phi(q_K)e^{-\pi||q_{K^\perp}||^2}$, где K - конечномерное подпространство, $q_K = P_K(q), q_{K^\perp} = P_{K^\perp}(q)$, а функция $\phi : K \to \mathbb{C}$ - непрерывная, произведения которой на полиномы являются ограниченными функциями, тогда f интегрируема по λ_Q, причем $\int\limits_Q f(q)\lambda_Q(dq) = \int\limits_K \phi(q_K)\lambda_K(dq_K)$. Другими словами, любая C_1 - интегрируемая функция на пространстве Q является интегрируемой по обобщенной мере Лебега, и интегралы от этой функции по обеим мерам совпадают.*

Доказательство.

Пусть $\{L_m\}$ - последовательность конечномерных подпространств Q, таких что $L_k \subset L_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\cup_{m=1}^{+\infty} L_m$ всюду плотно в Q.

Обозначим $n = dim(K)$, а $e_1, ..., e_n$ - какой-то ортонормированный базис K. Поскольку $\cup_{m=1}^{+\infty} L_m$ всюду плотно в Q, найдутся векторы $v_1, ..., v_n \in \cup_{m=1}^{+\infty} L_m$ такие, что $||e_i - v_i|| < \frac{1}{4}$ $\forall i \in \overline{1, ..., n}$. Существует номер m_0 такой, что $v_i \in L_m$ $\forall i \in \overline{1, ..., n}, \forall m \geq m_0$. Положим $U_m = L_m \cap K^\perp$, V_m - ортогональное дополнение U_m в пространстве L_m. В силу того, что $dim(K) = n$ и того, что $v_i \in L_m$ $\forall i \in \overline{1, ..., n}$, имеем $dim(V_m) = n$.

Из построения следует, что для любой точки $q_K \in K$ ближайшая к ней точка из L_m будет лежать в пространстве V_m. Следовательно, $v_1, ...v_n$ можно выбрать из V_m. Пусть Pr_{K,V_m} - сужение оператора ортогонального проектирования Pr_K на подпространство V_m. Тогда начиная с номера $m = m_0$, $Pr_{K,V_m}(V_m) = K$, что следует из линейной независимости векторов $Pr_{K,V_m} v_i$, а поскольку $dim(K) = dim(V_m)$, то Pr_{K,V_m} будет взаимно однозначным соответствием K и V_m.

Зафиксируем $\epsilon > 0$. Поскольку $\phi(q_K)$ интегрируема по K, то существует шар $B(0; r)$ такой, что $\int\limits_{K \setminus B(0;r)} |\phi(q_K)|\lambda_K(dq_K) < \epsilon$. В силу непрерывности f, а также всюду плотности $\cup_{m=1}^{+\infty} L_m$ следует, что существует номер $m_1 \geq m_0$ такой, что для любого $m \geq m_1$ $|\int\limits_{B(0,r)} \phi(q_K)\lambda_K(dq_K) - \int\limits_{Pr^{-1}_{K,V_m} B(0,r)} f(q)\lambda_{V_m}(dq)| = |\int\limits_{B(0,r)} f(q)\lambda_K(dq) - \int\limits_{Pr^{-1}_{K,V_m} B(0,r)} f(q)\lambda_{V_m}(dq)| < \epsilon$. В данном случае под $Pr^{-1}_{K,V_m} B(0, r)$ понимается полный прообраз $B(0, r)$ в пространстве V_m при отображении Pr_{K,V_m}.

$$\int\limits_{V_m \setminus Pr^{-1}_{K,V_m} B(0,r)} |f(q)|\lambda_{V_m}(dq) = \int\limits_{V_m \setminus Pr^{-1}_{K,V_m} B(0,r)} |\phi(Pr_{K,V_m}(q))|e^{-\pi||q_{K^\perp}||^2}\lambda_{V_m}(dq) \leq$$

$$\leq \int\limits_{V_m \setminus Pr^{-1}_{K,V_m} B(0,r)} |\phi(Pr_{K,V_m}(q))|\lambda_{V_m}(dq) \leq \int\limits_{K \setminus B(0,r)} |\phi(q_K)||J_m|\lambda_K(dq) =$$

$= |J_m| \int\limits_{K \setminus B(0,r)} |\phi(q_K)|\lambda_K(dq) < \epsilon|J_m|$. Здесь J_m обозначает якобиан отображения $Pr_{K,V_m} : V_m \to K$, причем $|J_m| \to 1$ при $m \to \infty$, т.к. элементы ортонормированного базиса L_m стремятся к элементам фиксированного ортонормированного базиса $e_1, ..., e_n$ пространства K при $m \to \infty$. Поэтому существует номер $m_2 \geq m_1$, начиная с которого $|J_m| < 2$, а $\int\limits_{V_m \setminus Pr^{-1}_{K,V_m} B(0,r)} |f(q)|\lambda_{V_m}(dq) < 2\epsilon$.

Если $q \in L_m$, то $q = q_{V_m} + q_{U_m}$, следовательно $f(q) = f(q_{V_m})e^{-\pi||q_{U_m}||^2}$. Тогда $\int\limits_{L_m} f(q)\lambda_{L_m}(dq) = \int\limits_{V_m}\int\limits_{U_m} f(q_{V_m})e^{-\pi||q_{U_m}||^2}\lambda_{L_m}(dq) = \int\limits_{V_m} f(q_m)\lambda_{V_m}(dq_m) =$
$= \int\limits_{V_m} f(q)\lambda_{V_m}(dq)$.

Таким образом, при $m \geq m_2$ имеем: $|\int\limits_K \phi(q_K)\lambda_K(dq_K) - \int\limits_{L_m} f(q)\lambda_{L_m}(dq)| = |\int\limits_K \phi(q_K)\lambda_K(dq_K) - \int\limits_{V_m} f(q)\lambda_{V_m}(dq)| \leq |\int\limits_{B(0,r)} \phi(q_K)\lambda_K(dq_K) - \int\limits_{Pr^{-1}_{K,V_m}B(0,r)} f(q)\lambda_{V_m}(dq)| + |\int\limits_{K\setminus B(0,r)} \phi(q_K)\lambda_K(dq_K) - \int\limits_{V_m\setminus Pr^{-1}_{K,V_m}B(0,r)} f(q)\lambda_{V_m}(dq)| \leq \epsilon + \int\limits_{K\setminus B(0,r)} |\phi(q_K)|\lambda_K(dq_K) + \int\limits_{V_m\setminus Pr^{-1}_{K,V_m}B(0,r)} |f(q)|\lambda_{V_m}(dq) \leq 4\epsilon$.

Следовательно последовательность $\int\limits_{L_m} f(q)\lambda_{L_m}(dq)$ стремится к $\int\limits_K \phi(q_K)\lambda_K(dq_K)$ при $m \to \infty$ для любой последовательности $\{L_m\}$ из определения интегрируемой функции.

Таким образом, теорема доказана.

Отметим, однако, что Определение 1.1 пространства $B_1(Q)$ не является ни явно конструктивным, ни, как показывает практика, удобным для применений. Поэтому далее обсуждаются более конструктивные достаточные условия принадлежности к $B_1(Q)$, и в последнем находится более удобное пространство $F_1(Q)$, расширяющее $C_1(Q)$.

Пусть $\gamma_{\frac{1}{2\pi}I}$ - цилиндрическая гауссовская мера на пространстве Q (в смысле определения из [10]) с корреляционным оператором $\frac{1}{2\pi}I$, где I - единичный оператор. Заметим, что для любой функции $f \in C_1(Q), f(q) = \phi(q_K)e^{-\pi||q||^2}$, $\int\limits_Q f(q)\lambda_Q(dq) = \int\limits_Q \phi \circ P_K(q)\gamma_{\frac{1}{2\pi}I}(dq)$. Пусть B - ядерный самосопряженный положительно определенный оператор. Пусть $\gamma_{\frac{1}{2\pi}B}$ - цилиндрический образ меры $\gamma_{\frac{1}{2\pi}I}$ на пространстве Q при отображении $\sqrt{B} : Q \to Q$, т.е. цилиндрическая мера такая, что для любого цилиндрического подмножества C пространства Q $\gamma_{\frac{1}{2\pi}B}(C) = \gamma_{\frac{1}{2\pi}I}(\sqrt{B}^{-1}(C))$. В этом случае корреляционный оператор меры $\gamma_{\frac{1}{2\pi}B}$ равен $\frac{1}{2\pi}B$, что следует из свойств преобразования Фурье цилиндрических мер (предложение 2, глава 1, [10]). Обозначим $\overline{\gamma}_{\frac{1}{2\pi}B}$ цилиндрический образ меры $\gamma_{\frac{1}{2\pi}I}$ на пространстве $\sqrt{B}(Q)$ как нормированном подпространстве в Q при отображении $\sqrt{B} : Q \to \sqrt{B}(Q)$. Как известно ([11]), мера $\gamma_{\frac{1}{2\pi}B}$ является счетно-аддитивной. Если бы выполнялось $\gamma^*_{\frac{1}{2\pi}B}(\sqrt{B}(Q)) = 1$ (здесь $\gamma^*_{\frac{1}{2\pi}B}$ - внешняя мера, значения которой на борелевских множествах совпадают со значениями лебегова продолжения), то мера $\overline{\gamma}_{\frac{1}{2\pi}B}$ была бы сужением меры $\gamma_{\frac{1}{2\pi}B}$ на подпространство $\sqrt{B}(Q)$; в этом случае $\int\limits_Q f(q)\lambda_Q(dq) = \int\limits_Q \phi \circ P_K(q)\gamma_{\frac{1}{2\pi}I}(dq) = \int\limits_{\sqrt{B}(Q)} \phi \circ P_K(\sqrt{B}^{-1}q)\gamma_{\frac{1}{2\pi}B}(dq)$, т.е. интеграл от функции f по обобщенной мере Лебега можно было бы получить как интеграл от некоторой связанной с f функцией по обычной счетно-аддитивной мере. Тогда можно было бы задать гораздо более широкий класс интегрируемых функций, нежели функции, представляющиеся в виде произведения цилиндрической на $e^{-\pi||\cdot||^2}$. Однако, $\sqrt{B}(Q)$ является пространством Камерона-Мартина для меры $\gamma_{\frac{1}{2\pi}B}$, причем $\gamma^*_{\frac{1}{2\pi}B}(\sqrt{B}(Q)) = 0$ ([11]), значит описанная выше конструкция неприменима. Эти рассуждения показывают, что определить обобщенную меру Лебега самым естественным способом через счетно-аддитивные гауссовские меры не получается. Поэтому приходится вводить другую конструкцию, описываемую в следующем разделе.

2. Квадратично-интегрируемые функции по обобщенной мере Лебега

В [3] вводится также определение пространства $C_2(Q)$: будем говорить, что $f \in C_2(Q)$, если существует $h \in C_1(Q)$ такая, что $f(q) = h(\frac{q}{\sqrt{2}})$. В этом случае произведение любых двух функций из $C_2(Q)$ будет функцией из $C_1(Q)$, а значит, на $C_2(Q)$ можно ввести естественное скалярное произведение: если $f_1, f_2 \in C_2(Q)$, то положим $(f_1, f_2)_{C_2(Q)} = \int\limits_Q f_1\overline{f_2}\lambda_Q(dq)$, относительно которого $C_2(Q)$ является эрмитовым пространством.

Пусть $\mathcal{H}$ - пополнение пространства $C_2(Q)$. Именно (фоковское) пространство $\mathcal{H}$ играет центральную роль в конструкции квантования в статье [3]. Поэтому представляет интерес вопрос, как именно устроено пространство $\mathcal{H}$, в частности, любой ли элемент этого пространства можно естественным образом задать борелевской функцией на Q.

Пространство, определяемое далее, расширяет $C_2(Q)$.

Будем говорить, что борелевская функция f принадлежит множеству $F_2(Q)$, если и только если существует последовательность функций $f_n, f_n \in C_2(Q)\ \forall n \in \mathbb{N}$, таких , что $|f - f_n|^2$ интегрируема по $\lambda(Q)$ и $\int\limits_Q |f - f_n|^2\lambda_Q(dq) \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. *$F_2(Q)$ является линейным полуэрмитовым пространством, содержащим пространство $C_2(Q)$ со своим полускалярным произведением (которое на самом деле является скалярным на $C_2(Q)$) в качестве полуэрмитова подпространства, причем $C_2(Q)$ всюду плотно в $F_2(Q)$.*

Доказательство.

Будем рассматривать $C_2(Q)$ как полуэрмитово пространство. Очевидно, что $C_2(Q) \subset F_2(Q)$.

Пусть $f, g \in F_2(Q)$, а f_n и g_n - соответствующие этим функциям последовательности из $C_2(Q)$.

Поскольку $|f_n - f_m|^2 \leq 2(|f - f_n|^2 + |f - f_m|^2)$ и квадрат полунормы каждой функции из пространства $C_2(Q)$ совпадает с интегралом от квадрата этой функции по всему пространству Q , последовательности f_n и g_n являются фундаментальными в $C_2(Q)$. Из этого, а также из того, что $(f_n, g_n)_{C_2(Q)} = \int\limits_Q f_n\overline{g_n}\lambda_Q(dq)$, следует, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_Q f_n\overline{g_n}\lambda_Q(dq) = I$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_Q f_n^2\lambda_Q(dq) = I_f^2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_Q g_n^2\lambda_Q(dq) = I_g^2$.

Из неравенства $|f|^2 \leq 2(|f - f_n|^2 + |f_n|^2)$ получаем, что $|f|^2$ интегрируема по любому конечномерному подпространству $L \subset Q$. Аналогичное утверждение верно и для $|g|^2$. Следовательно, в силу неравенства Коши-Буняковского, функция $f\overline{g}$ также интегрируема по любому конечномерному подространству $L \subset Q$. Кроме того, т.к. $\int\limits_{L_m} |f|^2\lambda_{L_m}(dq) \leq 2\int\limits_{L_m} |f - f_n|^2\lambda_{L_m}(dq) + \int\limits_{L_m} |f_n|^2\lambda_{L_m}(dq)$, то переходя к пределу по m, получаем $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\int\limits_{L_m} |f|^2\lambda_{L_m}(dq) \leq 2\int\limits_Q |f - f_n|^2\lambda_Q(dq) + 2\int\limits_Q |f_n|^2\lambda_Q(dq)$. Перейдя теперь к пределу по n, получим неравенство $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\int\limits_{L_m} |f|^2\lambda_{L_m}(dq) \leq 2I_f^2$. Аналогично $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\int\limits_{L_m} |g|^2\lambda_{L_m}(dq) \leq 2I_g^2$.

Т.к. $\int\limits_{L_m} f\overline{g}\lambda_{L_m}(dq) - I = \int\limits_{L_m} (f - f_n)\overline{g}\lambda_{L_m}(dq) + \int\limits_{L_m} f_n(\overline{g} - \overline{g_n})\lambda_{L_m}(dq) + \int\limits_{L_m} f_n\overline{g_n}\lambda_{L_m}(dq) - I$, то $|\int\limits_{L_m} f\overline{g}\lambda_{L_m}(dq) - I| \leq \int\limits_{L_m} |(f - f_n)\overline{g}|\lambda_{L_m}(dq) + \int\limits_{L_m} |f_n(\overline{g} - \overline{g_n})|\lambda_{L_m}(dq) + |\int\limits_{L_m} f_n\overline{g_n}\lambda_{L_m}(dq) - I|$, а следовательно и $|\int\limits_{L_m} f\overline{g}\lambda_{L_m}(dq) - I| \le \sqrt{\int\limits_{L_m} |f-f_n|^2\lambda_{L_m}(dq)}\sqrt{\int\limits_{L_m} |g|^2\lambda_{L_m}(dq)} + \sqrt{\int\limits_{L_m} |f_n|^2\lambda_{L_m}(dq)}\sqrt{\int\limits_{L_m} |g$ $|\int\limits_{L_m} f_n\overline{g_n}\lambda_{L_m}(dq) - I|$. Переходя к пределу по m, получаем $\overline{\lim_{m\to\infty}}|\int\limits_{L_m} f\overline{g}\lambda_{L_m}(dq) - I| \le \sqrt{\int\limits_{Q} |f-f_n|^2\lambda_Q}$ $\sqrt{\int\limits_Q |f_n|^2\lambda_Q(dq)}\sqrt{\int\limits_Q |g-g_n|^2\lambda_Q(dq)} + |\int\limits_Q f_n\overline{g_n}\lambda_Q(dq) - I|$. В силу ограниченности последовательности $\int\limits_Q |f_n|^2\lambda_Q(dq)$ по n и того, что величина $\sqrt{\overline{\lim_{m\to\infty}}\int\limits_{L_m} |g|^2\lambda_{L_m}(dq)}$ конечна, а также из условия на функции f_n и g_n, получаем, что первые два слагаемых в правой части неравенства стремятся к 0 при $n \to \infty$. Третье слагаемое стремится к 0 по определению числа I. Таким образом, переходя в неравенстве к пределу по n, получаем, что $\overline{\lim_{m\to\infty}}|\int\limits_{L_m} f\overline{g}\lambda_{L_m}(dq) - I| \le 0$, следовательно $\exists \lim_{m\to\infty}\int\limits_{L_m} f\overline{g}\lambda_{L_m}(dq) = I$ для любой последовательности $\{L_m\}$ из определения интегрируемой функции.

Таким образом, $\forall f, q \in F_2(Q)$ функция $f\overline{g}$ интегрируема по обобщенной мере Лебега, в частности, $|f|^2$ и $|g|^2$ интегрируемы.

Очевидно, что из $f \in F_2(Q)$ следует $\overline{f} \in F_2(Q)$ и $\alpha f \in F_2(Q)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Докажем, что $f+g \in F_2(Q)$. Т.к. функция $|f+g-(f_n+g_n)|^2$ представляется в виде суммы произведений функций из $F_2(Q)$, то она является интегрируемой по λ_Q. Из неравенства $|f+g-(f_n+g_n)|^2 \le 2(|f-f_n|^2+|g-g_n|^2)$ получаем, что $\int\limits_Q |f+g-(f_n+g_n)|^2\lambda_Q(dq) \to 0$ при $n\to\infty$, а т.к. $f_n+g_n \in C_2(Q)$, то $f+g \in F_2(Q)$.

Положим $(f,g)_{F_2(Q)} = \int\limits_Q f\overline{g}\lambda_Q(dq)$. Очевидно, что для $(\cdot,\cdot)_{F_2(Q)}$ выполняются все свойства скалярного произведения кроме невырожденности, т.е. того, что из $(a,a)_{F_2(Q)} = 0$ следует что $a = 0$ в $F_2(Q)$, т.е. оно является полускалярным произведением. Очевидно также, что $\forall f_0, g_0 \in C_2(Q)$ $(f_0,g_0)_{C_2(Q)} = (f_0,g_0)_{F_2(Q)} = \int\limits_Q f_0 g_0\lambda_Q(dq)$.

Из доказанного и условия теоремы очевидно следует, что $C_2(Q)$ плотно в $F_2(Q)$.

Таким образом, теорема доказана.

Пространство $F_2(Q)$ действительно является полуэрмитовым, а не эрмитовым. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть функцию $e^{-\frac{(\pi+1)||q||^2}{2}}$, которая всюду строго положительна, при этом ее норма в $F_2(Q)$ равна 0. Поэтому пространство $F_2(Q)$ можно профакторизовать по подпространству элементов, норма которых равна 0. Обозначим это фактор-пространство символом $\widetilde{F_2}(Q)$. В дальнейшем, когда мы будем говорить, что функция из $C_2(Q)$ или $F_2(Q)$ принадлежит пространству $\widetilde{F_2}(Q)$ или $\mathcal{H}(Q)$, мы будем подразумевать, что имеется в виду класс эквивалентности этой функции. $\widetilde{F_2}(Q)$ - эрмитово пространство, а $C_2(Q)$ является его эрмитовым подпространством. Как будет показано дальше $C_2(Q) \neq \widetilde{F_2}(Q)$. Кроме того, $\widetilde{F_2}(Q) \subset \mathcal{H}(Q)$ и $(f,g)_{\mathcal{H}(Q)} = \int\limits_Q f\overline{g}\lambda_Q(dq)$, $\forall f, g \in \widetilde{F_2}(Q)$, что следует из доказательства предыдущей теоремы. Однако пока неясно, совпадает ли $\widetilde{F_2}(Q)$ при естественном вложении, использующем фундаментальные последовательности пополняемого $C_2(Q)$, с пространством $\mathcal{H}(Q)$. Поэтому можно высказать следующую гипотезу.

Гипотеза. $\widetilde{F_2}(Q) = \mathcal{H}(Q)$.

Следующее предложение помогает доказывать принадлежность функций пространству $F_2(Q)$ в некоторых случаях.

(Достаточное условие принадлежности пространству $F_2(Q)$). Пусть $f : Q \to \mathbb{C}$ - борелевская функция, а $f_n \in C_2(Q)$ - последовательность такие, что $\forall \epsilon\ \exists N : \forall L \subset Q$ (L - конечномерное подпространство), $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N$ верно, что $|f - f_n|^2$ интегрируема по L и $\int\limits_L |f - f_n|^2 \lambda_L(dq) \leq \epsilon^2$. Тогда $f \in F_2(Q)$, причем $f_n \to f$ в $\mathcal{H}(Q)$. *Доказательство.*

Т.к. существет такое L, что $\int\limits_L |f_n - f_m|^2 \lambda_L(dq) = \int\limits_Q |f_n - f_m|^2 \lambda_Q(dq)$, и выполняется неравенство $|f_n - f_m|^2 \leq 2(|f - f_n|^2 + |f - f_m|^2)$, то последователльность f_n фундаментальна в $C_2(Q)$. Следовательно, существует число $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_Q |f_n|^2 \lambda_Q(dq) = I^2$. Кроме того, $\forall n\ \exists \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_Q f_k \overline{f_n} \lambda_Q(dq) = I_n^2$.

Из неравенства $|f|^2 \leq 2(|f - f_n|^2 + |f_n|^2)$ следует $f \in L_2(L)$ и $f\overline{f_n} \in L_1(L)$.

Пусть L_m - последовательность расширяющихся подространств, объединение которых всюду плотно в Q. Тогда $\int\limits_{L_m} f\overline{f_n}\lambda_{L_m}(dq) - I_n^2 = \int\limits_{L_m} (f - f_k)\overline{f_n}\lambda_{L_m}(dq) + \int\limits_{L_m} f_k\overline{f_n}\lambda_{L_m}(dq) - I_n^2$, значит $|\int\limits_{L_m} f\overline{f_n}\lambda_{L_m}(dq) - I_n^2| \leq \int\limits_{L_m} |(f - f_k)\overline{f_n}|\lambda_{L_m}(dq) + |\int\limits_{L_m} f_k\overline{f_n}\lambda_{L_m}(dq) - I^2| \leq \sqrt{\int\limits_{L_m} |(f - f_k)|^2\lambda_{L_m}(dq)}\sqrt{}$ $|\int\limits_{L_m} f_k\overline{f_n}\lambda_{L_m}(dq) - I_n^2|$. Пусть ϵ - произвольное число. Из условия следует, что начиная с некоторого номера K_1 для $k > K_1$ будет выполняться неравенство $|\int\limits_{L_m} f\overline{f_n}\lambda_{L_m}(dq) - I_n^2| \leq \epsilon\sqrt{\int\limits_{L_m} |f_n|^2\lambda_{L_m}(dq)} + |\int\limits_{L_m} f_k\overline{f_n}\lambda_{L_m}(dq) - I_n^2|$. Устремив m к бесконечности, получим $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}|\int\limits_{L_m} f\overline{f_n}\lambda_{L_m}(dq) - I_n^2| \leq \epsilon I_n + |\int\limits_Q f_k\overline{f_n}\lambda_Q(dq) - I_n^2|$, следовательно $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}|\int\limits_{L_m} f\overline{f_n}\lambda_{L_m}(dq) - I_n^2| \leq \epsilon I_n$ для любого числа ϵ, т.е. $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}|\int\limits_{L_m} f\overline{f_n}\lambda_{L_m}(dq) - I_n^2| = 0$. Это означает, что $\exists \lim\limits_{m\to\infty}\int\limits_{L_m} f\overline{f_n}\lambda_{L_m}$ I_n^2 т.е. что $f\overline{f_n}$ интегрируема по λ_Q. Из этого также следует, что $\overline{f}f_n$ интегрируема по λ_Q.

Пусть снова L_m - последовательность расширяющихся подространств, объединение которых всюду плотно в Q. $\int\limits_{L_m} |f|^2\lambda_{L_m}(dq) - I^2 = \int\limits_{L_m} f\overline{(f - f_n)}\lambda_{L_m}(dq) + \int\limits_{L_m} (f - f_n)\overline{f_n}\lambda_{L_m}(dq) + \int\limits_{L_m} f_n\overline{f_n}\lambda_{L_m}(dq) - I^2$. Следовательно $|\int\limits_{L_m} |f|^2\lambda_{L_m}(dq) - I^2| \leq \sqrt{\int\limits_{L_m} |f|^2\lambda_{L_m}(dq)}\sqrt{\int\limits_{L_m} |f - f_n|^2\lambda_{L_m}(dq)} +$ $\sqrt{\int\limits_{L_m} |f - f_n|^2\lambda_{L_m}(dq)}\sqrt{\int\limits_{L_m} |f_n|^2\lambda_{L_m}(dq)} + |\int\limits_{L_m} |f_n|^2\lambda_{L_m}(dq) - I^2|$. Начиная с некоторого номера N_1 для любого $n > N_1$ имеем $|\int\limits_{L_m} |f|^2\lambda_{L_m}(dq) - I^2| \leq \epsilon\sqrt{\int\limits_{L_m} |f|^2\lambda_{L_m}(dq)} + \epsilon\sqrt{\int\limits_{L_m} |f_n|^2\lambda_{L_m}(dq)} + |\int\limits_{L_m} |f_n|^2\lambda_{L_m}(dq) - I^2|$. Устремляя m к бесконечности, получим $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}|\int\limits_{L_m} |f|^2\lambda_{L_m}(dq) - I^2| \leq \epsilon\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\sqrt{\int\limits_{L_m} |f|^2\lambda_{L_m}(dq)} + \epsilon\sqrt{\int\limits_Q |f_n|^2\lambda_Q(dq)} + |\int\limits_Q |f_n|^2\lambda_Q(dq) - I^2|$. Из неравенства $|f|^2 \leq 2(|f - f_n|^2 + |f_n|^2)$ очевидным образом следует, что величина $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\sqrt{\int\limits_{L_m} |f|^2\lambda_{L_m}(dq)}$ конечна, обозначим ее $\overline{I}$. Таким образом, $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}|\int\limits_{L_m} |f|^2\lambda_{L_m}(dq) - I^2| \leq \epsilon\overline{I} + \epsilon\sqrt{\int\limits_Q |f_n|^2\lambda_Q(dq)} + |\int\limits_Q |f_n|^2\lambda_Q(dq) - I^2|$. Устремляя n к бесконечности, получим $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}|\int\limits_{L_m} |f|^2\lambda_{L_m}(dq) - I^2| \leq \epsilon\overline{I} + \epsilon I$ для любого ϵ. Таким образом $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}|\int\limits_{L_m} |f|^2\lambda_{L_m}(dq) - I^2| \leq 0$ и $\lim\limits_{m\to\infty}\int\limits_{L_m} |f|^2\lambda_{L_m}(dq) = I^2$, т.е. $|f|^2$ интегрируема по λ_Q.

Из того, что $|f_n|^2, f\overline{f_n}, \overline{f}f_n, |f|^2$ интегрируемы по λ_Q следует, что $|f - f_n|^2$ интегрируема по λ_Q, а это очевидным образом означает, что выполняется условие $\int\limits_Q |f-f_n|^2\lambda_Q(dq) \to 0$ при $n\to\infty$, т.е. что $f\in F_2(Q)$.

Утверждение доказано.

Следующий пример доказывает, что $C_2(Q)\neq F_2(Q)$.

Пример 1. Пусть A - неотрицательный ядерный самосопряженный оператор в Q, $g\in C_2(Q)$. Тогда функция f, заданная равенством $f(q)=(Aq,q)g(q)$, принадлежит пространству $F_2(Q)$, причем $||f||_{\mathcal{H}(Q)}\leq \alpha\cdot trA$, где число α зависит только от g.

Докажем это утверждение.

Пусть $g(q)=\phi(q_K)e^{-\frac{\pi||q_{K^\perp}||^2}{2}}$, где K - конечномерное подпространство Q, а $\phi: K\to\mathbb{R}$ - непрерывная функция на K, произведение которой на любой полином является ограниченной функцией. Тогда $f(q)=(Aq,q)\phi(q_K)e^{-\frac{\pi||q_{K^\perp}||^2}{2}}$.

Обозначим $k=dim(K)$. Положим $\alpha_1=\max\limits_{1\leq i\leq k+2}\int\limits_{\mathbb{R}^i}\frac{||q||^4}{1+||q||^{2k+14}}\lambda_{\mathbb{R}^i}(dq)$. Пусть K_1 - произвольное подпространство размерности $k+2$ пространства $K^\perp$. Пусть пространство K_2 - линейная оболочка пространств K и K_1. Функция $\phi(q_K)e^{-\frac{\pi||q_{K_1}||^2}{2}}$ на пространстве K_2 обладает тем же свойством, что и $\phi(q_K)$ на пространстве K - произведение ее на любой полином ограничено, следовательно квадрат этой функции обладает тем же свойством. Это значит, что существует такая константа α_2, что $|\phi(q_K)|^2e^{-\pi||q_{K_1}||^2}\leq\frac{\alpha_2}{1+||q||^{2k+14}}$ на K_2.

Пусть L - произвольное конечномерное подпространство Q, а v_1 и v_2 - произвольные элементы L, норма которых равна 1. Докажем, что $\int\limits_L (v_1,q)^2(v_2,q)^2|\phi(q_K)|^2\ e^{-\pi||q_{K^\perp}||^2}\lambda_L(dq)$ ограничен константой, не зависящей от L. Пусть $L_1=L\cap K^\perp$, а L_2 - ортогональное дополнение L_1 в пространстве L. Тогда L_2 взаимно-однозначно отображается на некоторое подпространство пространства K при ортогональной проекции Pr_K. Пусть L_1' - не более, чем двумерное (возможно, нулевое) подпространство L_1 такое, что v_1 и v_2 лежат в линейной оболочке $<L_1',L_2>$ пространств L_1' и L_2. Пусть L_1'' - ортогональное дополнение L_1' в пространстве L_1. Тогда $\int\limits_L (v_1,q)^2(v_2,q)^2|\phi(q_K)|^2e^{-\pi||q_{K^\perp}||^2}\lambda_L(dq)=\int\limits_{L_1''}e^{-\frac{\pi||q_{L_1''}||^2}{2}}\lambda_{L_1''}(dq_{L_1''})\int\limits_{<L_1',L_2>}(v_1,q)^2$ $(v_2,q)^2|\phi(q_K)|^2\ e^{-\pi||q_{K^\perp}||^2}\lambda_{<L_1',L_2>}(dq)=\int\limits_{<L_1',L_2>}(v_1,q)^2(v_2,q)^2|\phi(q_K)|^2\ e^{-\pi||q_{K^\perp}||^2}\lambda_{<L_1',L_2>}(dq)$.

Поскольку $<L_1',L_2>$ можно заключить в некоторое пространство K_2, описанное выше, то функцию $|\phi(q_K)|^2\ e^{-\pi||q_{K^\perp}||^2}$ можно ограничить функцией $\frac{\alpha_2}{1+||q||^{2k+14}}$. Следовательно, $\int\limits_{<L_1',L_2>}(v_1,q)^2(v_2,q)^2|\phi(q_K)|^2\ e^{-\pi||q_{K^\perp}||^2}\lambda_{<L_1',L_2>}(dq)\leq\int\limits_{<L_1',L_2>}||q||^4\frac{\alpha_2}{1+||q||^{2k+14}}\lambda_{<L_1',L_2>}(dq)$. Поскольку, $dim<L_1',L_2>\leq k+2$, последний интеграл оценивается числом $\alpha_1\alpha_2$.

По теореме Гильберта-Шмидта существует ортонормированный базис $e_1,...,e_n,...$ пространства Q такой, что $Ae_i=\lambda_ie_i$, где $(\lambda_i)\in l_1(\mathbb{R})$.

Введем обозначения: $L_n=<e_1,...,e_n>$ - линейная оболочка векторов $e_1,...,e_n$, $q_k=(q,e_k)$, т.е. $q=\sum\limits_{k=1}^{\infty}q_ke_k$, $q_{L_n}=Pr_{L_n}q$ - ортогональная проекция вектора q на L_n, $A_n=A\circ Pr_{L_n}$. Положим также $A_0=0$ - нулевой оператор.

В силу того, что L_n инвариантно для A, имеем $(A_nq,q)=(A_nq_{L_n},q_{L_n})=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_kq_k^2$. Очевидно, что функции, заданные равенством $f_n(q)=(A_nq,q)g(q)$, принадлежат пространству

$C_2(Q)$.

Положим $B_n = A - A_n$. Тогда B_n - ядерные самосопряженные операторы, причем $trB_n \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть L - произвольное конечномерное подпространство в Q.

Зафиксируем n, тогда функция $\{q \to (B_n q, q), q \in L\}$ является неотрицательно определенной квадратичной формой на L, значит существует такой неотрицательно определенный самосопряженный оператор C в пространстве L, что $(B_n q, q) = (Cq, q)\ \forall q \in L$. Пусть $u_1, ..., u_m$ - базис пространства L из собственных векторов оператора C с собственными значениями c_i. Дополним его до ортонормированного базиса $\{u_k\}$ всего пространства Q. Обозначим $\widetilde{q_i} = (q, u_i)$. Тогда $|f(q) - f_n(q)|^2|_L = (B_n q, q)^2 g^2(q)|_L = (\sum\limits_{k=1}^{m} c_k \widetilde{q_k}^2)^2 g^2(q)$.

Тогда $\int\limits_L |f(q) - f_n(q)|^2 \lambda_L(dq) = \int\limits_L (\sum\limits_{k=1}^{m} c_k \widetilde{q_k}^2)^2 g(q) \lambda_L(dq) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m} c_i c_j \int\limits_L \widetilde{q_i}^2 \widetilde{q_j}^2\ g(q) \lambda_L(dq) \leq \alpha_1 \alpha_2 (\sum\limits_{k=1}^{n} c_i)^2 = \alpha_1 \alpha_2 (trC)^2$.

Т.к. оператор B_n - ядерный, а $\{u_k\}$ - ортонормированный базис, то $trB_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (B_n u_k, u_k)$ (лемма 7.10.34 из [12]) $= \sum\limits_{k=1}^{m} (B_n u_k, u_k) + \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} (B_n u_k, u_k) = trC + \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} (B_n u_k, u_k)$. В силу того, что оператор B_n неотрицательно определен, получаем $trC \leq trB_n$.

Таким образом, $\int\limits_L |f(q) - f_n(q)|^2 \lambda_L(dq) \leq \alpha_1 \alpha_2 (trB_n)^2$. Правая часть неравенства стремится к нулю равномерно по всем конечномерным подпространствам L пространства Q. Следовательно, выполняется достаточное условие принадлежности пространству $F_2(Q)$, т.е. $f \in F_2(Q)$.

В частности, при $n = 0$, полученная выше оценка приводит к неравенству $\int\limits_L |f(q)|^2 \lambda_L(dq) \leq \alpha_1 \alpha_2 (trA)^2$ или, вводя обозначение $\alpha = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$, к неравенству $||f||_{\mathcal{H}(Q)} \leq \alpha \cdot trA$.

Утверждение доказано.

Положим $F_1(Q) = \{f : \exists\ f_1, f_2 \in F_2(Q), f = f_1 f_2\}$. Как было доказано в теореме 2.2, $\forall f \in F_1(Q)$ f интегрируема по λ_Q. Пусть $f \in C_1(Q), f(q) = \phi(q_K) e^{-\pi ||q_{K^\perp}||^2}$, где $\phi : K \to \mathbb{C}$ - непрерывная функция, произведения которой на полиномы являются ограниченными. Функцию ϕ можно представить в виде $\phi = sgn(\phi)\sqrt{|\phi|}\sqrt{|\phi|}$, где функция sgn определена следующим образом: $sgn(z) = \frac{z}{|z|}$ при $z \neq 0$ и $sgn(z) = 0$ при $z = 0$. Функция $\sqrt{|\phi|}$ также является непрерывной, произведения которой на полиномы ограничены. Следовательно, для любой функции $f \in C_1(Q)$ можно записать $f(q) = sgn(\phi(q_K))\sqrt{|\phi(q_K)|} e^{-\frac{\pi ||q_{K^\perp}||^2}{2}} \cdot \sqrt{|\phi(q_K)|} e^{-\frac{\pi ||q_{K^\perp}||^2}{2}}$, т.е. представить f в виде произведения двух функций из $C_2(Q)$. Последнее означает, что $C_1(Q) \subset F_1(Q)$.

Положим $V(q) = e^{-\frac{\pi ||q||^2}{2}}$. Как было показано в примере 2.1, функция $g(q) = (Aq, q) e^{-\frac{\pi ||q||^2}{2}} \in F_2(Q)$, следовательно $Vg \in F_1(Q)$. Кроме того, $Vg \notin C_1(Q)$. Таким образом, пространство $F_1(Q)$ с определенной на нем обобщенной мерой Лебега λ_Q строго расширяет пространство $C_1(Q)$ с определенной на нем мерой Лебега-Фейнмана-Смолянова.

Источник финансирования

Работа выполнена при финансовой поддержке Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему бывшему научному руководителю Олегу Георгиевичу Смолянову за то, что он показал, насколько интересна математическая физика в целом и используемая в ней теория мер (в том числе обобщенных) в частности, обозначил огромный спектр направлений деятельности в области математической теории квантовых явлений (в частности в области обобщенных трансляционно-инвариантных мер) и давал ценные жизненные советы.

Автор также выражает большую благодарность Николаю Николаевичу Шамарову за постановку задачи и ценные идеи, связанные с ней, а также благодарность Всеволоду Жановичу Сакбаеву за интерес к теме исследований и ценные замечания.

Список литературы

[1] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Paris, 1940.

[2] Смолянов О.Г., Монтальди Дж., *Интегралы Фейнмана по траекториям и меры Лебега - Фейнмана*, Доклады Российской академии наук. 2017, том 475, с. 490 - 495.

[3] Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н., *Квантование по Шрёдингеру бесконечномерных гамильтоновых систем с неквадратичной функцией Гамильтона*, Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2020, том 492, с. 65 - 69.

[4] Гоф Дж. Э., Ратью Т. С., Смолянов О. Г. *Использование дифференциальных свойств обобщенных мер Лебега–Фейнмана при исследовании квантовых аномалий*, Труды МИАН, 2020, том 310, с. 107–118.

[5] Гоф Дж. Э., Ратью Т. С., Смолянов О. Г. *Квантовые аномалии и логарифмические производные псевдомер Фейнмана*, Доклады Российской академии наук, 2015, том 465, № 6, с. 651–655.

[6] Гоф Дж. Э., Ратью Т. С., Смолянов О. Г. *Теоремы Нетер и квантовые аномалии*, Доклады Российской академии наук, 2017, том 472, № 3, с. 248–252.

[7] Сакбаев В.Ж., *Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов*, ТМФ, 2017, том 191, №3, с. 473 - 502.

[8] Сакбаев В.Ж., *Случайные блуждания и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов и поворотов*, Итоги науки и техники. Совр. математика и ее прил. Тематич. обзоры. 2017, том 140, с. 88–118.

[9] V. Zh. Sakbaev, O. G. Smolyanov *Lebesgue-Feyntman Measures on Infinite Dimensional Spaces*, International Journal of Theoretical Physics, 2021, 60, pages 650–654.

[10] Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. *Континуальные интегралы*, М.: ЛЕНАНД, 2015, 336 с.

[11] Богачев В.И. *Гауссовские меры*, М.: НАУКА. Физматлит, 1997, 352 с.

[12] Богачёв В.И., Смолянов О.Г., *Действительный и функциональный анализ*, Москва-Ижевск, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2011, 728 с.