Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Антинормы и автополярные многогранники

Макаров Максим Сергеевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: maximka1905@mail.ru

Понятие антинормы в линейном пространстве было введено Merikoski J. K. [2] в 1990 году. Затем его независимо использовали Richter W-D., Guglielmi N. [3], Zennaro M. [3], Protasov V. Yu. при решении различных прикладных задач. Антинорма — это положительно однородный вогнутый функционал, заданный на некотором конусе в $\mathbb{R}^d$, то есть антинорма является вогнутым аналогом нормы. Многие задачи теории функций и численного анализа приводят к данному понятию.

Кусочно-линейные антинормы соответствуют так называемым *коническим* многогранникам: множеству решений систем вида $(a_k, x) \geqslant b_k$, $x \in \mathbb{R}^d_+$, $k = 1, \ldots, n$, где $a_k \in \mathbb{R}^d_+$ – ненулевые векторы и $b_k \geqslant 0$. Эти конические многогранники будем для удобства называть просто многогранниками.

На антинормы переносятся некоторые результаты теории двойственности. При этом выполняются аналоги многих теорем выпуклой теории (неравенство Йенсена, теорема Фенхеля-Моро, теоремы отделимости). Оказалось, однако, что в отличие от норм (где единственной самодвойственной нормой является евклидова) существует множество различных самодвойственных антинорм. Например, в $\mathbb{R}^2_+$ существуют кусочно-линейные (полиэдральные) самодвойственные антинормы. Единичный шар в такой антинорме является автополярным многогранником.

Классификация самодвойственных антинорм в $\mathbb{R}^2_+$ приведена в [4], а существование таковых в $\mathbb{R}^d_+$ для $d \geqslant 3$ было оставлено в качестве открытой проблемы. Решением служит следующая теорема[1]:

Теорема 1. *При любых $d \geqslant 2$ и $n \geqslant 1$ в положительном октанте $\mathbb{R}^d_+$ существует не менее двух комбинаторных типов автополярных многогранников с n вершинами, не являющихся поднятиями автополярных многогранников меньших размерностей.*

Следствие 1. *При любых $d \geqslant 2$ и $n \geqslant 1$ в положительном октанте $\mathbb{R}^d_+$ существует как минимум две самодвойственные антинормы с n вершинами, не являющиеся поднятиями автополярных многогранников меньших размерностей.*

Антинорма называется симметричной, если она не зависит от перестановки координат, т.е. $f(x_1, \ldots, x_d) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)})$, $\sigma \in S_d$. Известно [4], что в $\mathbb{R}^2_+$ существует единственная самодвойственная антинорма $f(x_1, x_2) = \sqrt{2x_1x_2}$. В работе [4] была выдвинута гипотеза о том, что аналогичное утверждение имеет место в $\mathbb{R}^d_+$: *в $\mathbb{R}^d_+$ существует единственная самодвойственная антинорма* $f(x_1, \ldots, x_d) = \sqrt{dx_1 \ldots x_d}$. Мы опровергаем данную гипотезу с помощью гладкой симметричной самодвойственной антинормы в $\mathbb{R}^3_+$.

В докладе будет показано построение конструкции автополярных многогранников и автополярных антинорм в $\mathbb{R}^d_+$ при $d \geqslant 3$ и построение гладкой симметричной самодвойственной антинормы в $\mathbb{R}^3_+$. Также будут упомянуты некоторые приложения антинорм к задаче вычисления показателей Ляпунова линейных операторов.

Источники и литература

1) Макаров М. С. Антинормы и автополярные многогранники // подано в Сибирский Математический Журнал (2023)
2) Merikoski J. K. On $I_{p1,p2}$ antinorms of nonnegative matrices // Linear Algebra Appl. 140 (1990), 31–44.
3) Guglielmi N. and Zennaro M. An antinorm theory for sets of matrices: Bounds and approximations to the lower spectral radius // Linear Algebra Appl. 607 (2020), 89–117.
4) Protasov V. Yu. Antinorms on cones: duality and applications // Linear and Multilinear Algebra, DOI: 10.1080/03081087.2021.1988885.