Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Примеры двух неодномерных дифференциальных систем с крайней неустойчивостью по Ляпунову

Бондарев Алексей Андреевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: albondarev1998@yandex.ru

Настоящий доклад посвящён исследованию сочетаний ляпуновских и перроновских [1], а также верхнепредельных [2] свойств дифференциальных систем. Он логически продолжает цикл работ [3–5], усиливая их результаты:

1) работа [3] исправляла недостаток, указанный в замечании 4 к теореме 1 (см. [6]) (о неограниченности линейного приближения построенной системы вдоль нулевого решения), однако построенная в ней двумерная система обладала хотя и *ограниченным* на всей полуоси времени, но всё же ненулевым линейным приближением вдоль нулевого решения;

2) в работе [4] построена система, обладающая теми же свойствами, но уже с *нулевым* линейным приближением;

3) в работе [5] построены двумерные системы с ещё более сильными свойствами, а именно:

– первая из них обладала как *перроновской*, так и *верхнепредельной*, с одной стороны, *полной неустойчивостью* (а значит, и *ляпуновской глобальной неустойчивостью*), а с другой стороны, *массивной частной устойчивостью* (в отличие от всех рассмотренных выше примеров, в которых эта частная устойчивость была лишь *точечной*);

– вторая из этих систем обладала, с одной стороны, *ляпуновской глобальной неустойчивостью* (которая имелась и у систем из работ [3, 4]), а с другой стороны, как *перроновской*, так и *верхнепредельной глобальной устойчивостью* (в отличие от всех примеров предложенных ранее).

Нижеследующее усиление результатов работы [5] состоит, во-первых, в распространении их на случай неодномерных фазовых пространств сколь угодно высокой размерности, а во-вторых, в том, что обе приводящиеся здесь системы обладают уже не просто *ляпуновской глобальной неустойчивостью*, но даже *ляпуновской крайней неустойчивостью* (см. описание этого свойства в п. 2 теоремы 2 ниже).

При $n \in \mathbb{N}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (с нормой $|\cdot|$) рассматриваем системы вида

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с правой частью $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям

$$f, f'_x \in C\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n\right), \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

обеспечивающим существование и единственность решений задач Коши и наличие нулевого решения.

Теорема 1. *Для каждого $n > 1$ существует система* (1)*, которая имеет правую часть, удовлетворяющую условиям* (2) *и*

$$f'_x(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

а также обладает следующими двумя свойствами:

1) *для всех решений x, удовлетворяющих начальному условию $0 < |x(0)| \leqslant 1$, имеет место равенство*

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty;$$

2) *все остальные решения x удовлетворяют равенству*

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = 0. \tag{4}$$

Теорема 2. *Для каждого $n > 1$ существует система (1), которая имеет правую часть, удовлетворяющую условиям (2) и (3), а также обладает следующими двумя свойствами:*

1) *для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех решений x, удовлетворяющих начальному условию $0 < |x(0)| \leqslant \delta$, справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)| > \varepsilon^{-1};$$

2) *все решения удовлетворяют равенству (4).*

Замечание. Системы, существование которых утверждается в теоремах 1 и 2, неавтономны, неодномерны и нелинейны. Более того:

– полученные результаты не распространяется на автономные системы, поскольку для них полная и глобальная неустойчивости сразу всех трёх типов (ляпуновского, перроновского и верхнепредельного) логически неразличимы [7];

– ни одномерных, ни линейных (однородных) систем с такими наборами свойств не существует, поскольку для них ляпуновская полная (а значит, и глобальная) неустойчивость эквивалентна верхнепредельной глобальной неустойчивости [2].

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект 22-8-10-3-1).

Источники и литература

1) *Сергеев И.Н.* Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.

2) *Сергеев И.Н.* Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.

3) *Бондарев А.А.* Один пример неустойчивой системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899.

4) *Бондарев А.А.* Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 2. С. 43–47.

5) *Бондарев А.А., Сергеев И.Н.* Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 506. С. 25–29.

6) *Сергеев И.Н.* Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646.

7) *Сергеев И.Н.* Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. 2020. Т. 56. № 2. С. 63–78.