Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Об индексе дифференциально-разностных операторов на бесконечном цилиндре

Научный руководитель – Савин Антон Юрьевич

Жуйков Константин Николаевич

Аспирант

Российский университет дружбы народов, Факультет физико-математических и естественных наук, Москва, Россия

E-mail: zhuykovcon@gmail.com

Рассматривается бесконечный цилиндр $M=\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ с координатами (x,t), на котором задано действие группы $\mathbb{Z}$ диффеоморфизмами $g^k\colon M\to M$, $k\in\mathbb{Z}$, где $g(x,t)=(x,t+2\pi)$. На M рассматривается оператор вида

$$D=\sum_k D_k(x,-i\partial/\partial x,t,-i\partial/\partial t)T^k\colon H^{s,\gamma^-,\gamma^+}(M,\mathbb{C}^N)\longrightarrow H^{s-m,\gamma^-,\gamma^+}(M,\mathbb{C}^N), \qquad (1)$$

где D_k — матричный дифференциальный оператор порядка $\leq m$ на M, $T^k u(x,t)=u(x,t-2\pi k)$, а $H^{s,\gamma^-,\gamma^+}(M)$ — весовое пространство Соболева.

Внутренним символом оператора (1) в точке $(x,t,\xi,p)\in T_0^*M=\{(x,t,\xi,p)\mid \xi^2+p^2\neq 0\}$ кокасательного расслоения без нулевого сечения называется оператор

$$\sigma(D)(x,t,\xi,p)=\sum_k \sigma(D_k)(x,\xi,t+2\pi n,p)\mathcal{T}^k\colon \ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N\to\ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N, \qquad (2)$$

где $\sigma(D_k)$ — главный символ оператора D_k, $\mathcal{T}w(n)=w(n-1)$ — оператор сдвига, а $\ell^2(\mathbb{Z},\mu)=\left\{w(n)\mid \sum_n |w(n)|^2\mu(n)<\infty\right\}$.

Конормальным символом оператора (1) называется пара $(\sigma_c^+(D),\sigma_c^-(D))$ семейств операторов с параметром и периодическими коэффициентами:

$$\sigma_c^{\pm}(D)(p)=\sum_k D_k^{\pm}(x,-i\partial/\partial x,\pm\infty,p)e^{ikp}\colon H^s(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^N)\longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^N). \qquad (3)$$

Оператор (1) называется *эллиптическим*, если оператор (2) обратим при всех $(x,t,\xi,p)\in T_0^*M$, а операторы (3) обратимы на весовых прямых $L_{\gamma^\pm}=\{p\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}p=\gamma^\pm\}$. Кроме того, в [1] доказано, что оператор (1) обратим при больших значениях $p\in L_{\gamma^\pm}$, если его внутренний символ обратим.

Для эллиптического оператора (1) получена формула индекса, содержащая вклады внутреннего символа на основном многообразии и конормальных символов на бесконечности. В случае без сдвигов (т.е. при $D=D_0$ в (1)) полученный результат обобщает формулу Федосова–Шульце–Тарханова [2].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке конкурса «Молодая математика России», а также РФФИ и Немецкого научно-исследовательского сообщества (проект № 21-51-12006).

Источники и литература

1) *Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.* Эллиптические G-операторы на многообразиях с изолированными особенностями // СМФН, **59** (2016), 173–191.
2) *Fedosov B.V., Schulze B.-W., Tarkhanov N.* The index of higher order operators on singular surfaces // Pacific J. of Math., **191**:1 (1999), 25-48.