Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Полиномиальные решения и интегрируемость дифференциальных уравнений Абеля второго рода

Научный руководитель – Белова Мария Владимировна

Нечитайло Варвара Геннадьевна
Студент (бакалавр)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова, Москва, Россия
E-mail: varya.nechitaylo@mail.ru

В представленной работе проводился поиск точных оценок для числа различных полиномиальных решений дифференциальных уравнений вида

$$yy' + f(x)y + g(x) = 0, \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно, коэффициенты которых являются комплексными числами. Рассматриваемое семейство уравнений относится к классу полиномиальных дифференциальных уравнений Абеля второго рода

$$yy' + u_3(x)y^3 + u_2(x)y^2 + u_1(x)y + u_0(x) = 0 \tag{2}$$

Уравнения (2), в которых присутствует слагаемое $u_3(x)y^3$ или $u_2(x)y^2$, имеют не более 3 различных полиномиальных решений в невырожденных случаях. Случай $u_2(x) \equiv 0$ и $u_3(x) \equiv 0$, рассматриваемый в данной работе, является более сложным. Уравнения Абеля второго рода встречаются при описании большого числа явлений в различных областях науки: в физике, экологии, биологии и т.п. В частности, они появляются при переходе к переменным бегущей волны в уравнениях реакции-конвекции-диффузии. Также к уравнениям (1) и (2) можно свести многие ОДУ второго порядка, описывающие колебательные процессы.

Полиномиальные ОДУ Абеля второго рода активно исследуются в научной литературе. Существуют оценки на число различных полиномиальных решений [2], но они не являются точными. Полиномиальные решения классифицированы лишь для некоторых частных случаев.

В настоящем исследовании показано, что все уравнения вида (1) делятся на 5 подсемейств с принципиально разной структурой полиномиальных решений. С помощью методов степенной геометрии [1] и асимптотического анализа для каждого случая уточнены оценки на число различных полиномиальных решений. На основании этого с использованием теории инвариантов Дарбу исследована интегрируемость уравнений, имеющих полиномиальные решения. Было доказано, что уравнения (1) при $n \neq 2m+1$ не имеют первых интегралов вида $I(x,y) = \prod_{j=0}^{N}(y - P_j(x))^{d_j}$, где $P_j(x)$ – многочлен, $d_j \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}$. Найдены необходимые и достаточные условия существования интегрирующих множителей вида $M(x,y) = \prod_{j=0}^{N}(y - P_j(x))^{d_j}$, где $P_j(x)$ – многочлен, $d_j \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}$. В явном виде получены первые интегралы, соответствующие интегрирующим множителям. Построены примеры интегрируемых уравнений (1) при произвольных m и n, удовлетворяющих неравенствам $m < n < 2m+1$ и $n > 2m+1$.

Оценки на число различных полиномиальных решений при $m < n < 2m+1$ и $n > 2m+1$ являются точными и получены впервые. В случае $n = 2m+1$ построены оценки, которые улучшают результаты работы [2]. Найдены новые интегрируемые семейства дифференциальных уравнений Абеля второго рода.

Доклад подготовлен в рамках программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики"(НИУ ВШЭ).

Источники и литература

1) Брюно А.Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи математических наук, 2004, Т.59. №.3 (357). С. 31-80.
2) Ferragut, A., Libre J. On the Polynomial Solutions of the Polynomial Differential Equations $yy' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \cdots + a_n(x)y^n$// Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2020, P. 217-232.