Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О задаче Неймана для p-лапласиана на многообразиях с модельным концом

Бровкин Вадим Вадимович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: brovvadim2015@gmail.com

Предположим, что M — связное n-мерное ориентированное полное риманово многообразие с краем (возможно пустым). Рассмотрим задачу

$$\Delta_p u = f \quad \text{на } M, \qquad |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial M} = h, \qquad \int\limits_M |\nabla u|^p\,dV < \infty, \tag{1}$$

где Δ_p, $p > 1$, — оператор p-Лапласа-Бельтрами, ν — вектор внешней нормали к ∂M, а f и h — некоторые функции из $\mathcal{D}'(M)$, причем $\operatorname{supp} h \subset \partial M$. Решение задачи (1) будем понимать в обобщенном смысле [1].

Многообразие M называется p-гиперболическим, если $\operatorname{cap}_p(M) > 0$, где $\operatorname{cap}_p(M)$ — p-емкость многообразия M [1]. В противном случае многообразие M называется p-параболическим.

Для всех $l \in \mathcal{D}'(\Omega)$ обозначим

$$N_\Omega(l) = \sup_{\varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)}=1} |(l,\varphi)|,$$

где $\|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)}$ — полунорма в пространстве $L_p^1(\Omega)$ [2].

Предположим, что многообразие M представимо в виде

$$M = \omega \cup D \times [r_0, \infty), \quad \omega \cap D \times [r_0, \infty) = \varnothing, \tag{2}$$

где ω — липшицева область с компактным замыканием, D — компактное риманово многообразие с краем, а $r_0 > 0$ — некоторое вещественное число. Пусть также на множестве $D \times [r_0, \infty)$ задана метрика $ds^2 = a^2(r)\,dr^2 + b^2(r)\tilde{g}_{ij}(\theta)\,d\theta^i d\theta^j$, где a и b — положительные бесконечно гладкие функции на $[r_0, \infty)$, $\tilde{g}_{ij}$ — метрический тензор на D, θ^i — локальные координаты на D. Назовем множество $D \times [r_0, \infty)$ модельным концом многообразия M по отношению к области ω. Будем обозначать $M_{r_0} = \omega$, $M_r = \omega \cup D \times [r_0, r)$, $r > r_0$.

Теорема 1. *Пусть M — p-гиперболическое многообразие с модельным концом (2). Тогда для разрешимости задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы*

$$N_{M_{r_1}}(f-h) < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{i=2}^{\infty} N^{p/(p-1)}_{M_{r_{i+1}} \setminus \overline{M}_{r_{i-2}}}(f-h) < \infty, \tag{3}$$

где числа $r_i > r_0$, $i \in \mathbb{N}$, определяются из соотношений

$$\int_{r_{i+1}}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{(n-1)/(p-1)}}\,ds = \frac{1}{2}\int_{r_i}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)}\,ds.$$

Теорема 2. *Пусть M — p-параболическое многообразие с модельным концом (2). Тогда для разрешимости задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие (3), где числа $r_i > r_0$, $i \in \mathbb{N}$, определяются из соотношений*

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{a(s)}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)}\,ds = 1, \qquad \int_{r_0}^{r_{i+1}} \frac{a(s)}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)}\,ds = 2\int_{r_0}^{r_i} \frac{a(s)}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)}\,ds, \quad i \geqslant 1,$$

и при этом

$$\lim_{i\to\infty}(f-h,\eta_i) = 0, \qquad \lim_{i\to\infty}\|\eta_i\|_{L_p^1(M)} = 0 \qquad \text{и} \qquad \eta_i\big|_K = 1, \quad i \in \mathbb{N},$$

для некоторой последовательности $\eta_i \in C_0^\infty(M)$, $i \in \mathbb{N}$, *где* K *— компакт положительной меры.*

Источники и литература

1) *Бровкин В. В., Коньков А. А. О существовании решений второй краевой задачи для p-лапласиана на римановых многообразиях // Матем. заметки. 2021. Т. 109. No. 2. С. 180–195.*
2) *Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд–во ЛГУ, 1985.*