Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Применение дробных степенных рядов к решению некоторых уравнений типа Эмдена-Фаулера с дробной производной

Научный руководитель – Асташова Ирина Викторовна

Антонов Никита Андреевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: antonovna@my.msu.ru

\textbf{Н.~А.~Антонов} (Москва) “Применение дробных степенных рядов к решению
некоторых уравнений типа Эмдена-Фаулера с дробной производной”. %%%%%%%%%%%%%%
Дифференциальные уравнения с дробными производными хорошо описывают физические
процессы [1–4]. Для решения таких уравнений используются разные методы, одним из
которых является метод RFPS (residual fractional power series), позволяющий находить
их решения в виде дробных степенных рядов (см., напр., [9]). С его помощью строится
решение задачи Коши для уравнения типа Эмдена-Фаулера с дробными производными.
Эти уравнения находят применение в задачах, описывающих радиацонное охлаждение,
кинетику процессов горения, концентрацию реактивов в химических реакторах, поведе-
ние изотермических газов и термоэлектронную эмиссию [5–6]. \textbf{Определение~1.}
\emph{Пространством C_{μ}}, $\mu \in \mathbb{R}$, называется пространство та-
ких функций f, $x \in \mathbb{R}_{+} \setminus \{0\}$, что для любой функции $f \in
C_{\mu}$ существует такое $p \in \mathbb{R}$, $p > \mu$ и $g \in C(\mathbb{R_{+}})$,
что $f(x) = xg(x)$. \textbf{Определение~2.} \emph{Пространством C_{μ}}, $n \in
\mathbb{N}$, называется пространство таких функций f, что $f^{(n)} \in C_{\mu}$.
\textbf{Определение~3.} Пусть $x_0 \geqslant 0$. Тогда \emph{оператором дробного диф-
ференцирования} в смысле Капуто порядка $\alpha \in \mathbb{R}_{+} \setminus \{0\}$,
$\alpha \in (n-1; n)$, $n \in \mathbb{N}$, функции $f \in C_{-1}$ называется \begin{equation*}
{_{x_0}^{C}D_{x}^{\alpha}} f := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-
\alpha-1} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d} t} \mathrm{d} t, \quad \text{при} \quad
\alpha = n \quad \text{—} \quad {_{x_0}^{C}D_{x}^{n}} f := \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm
x}. \end{equation*} \textbf{Определение~4.} Функциональный ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}
c_n (x-x_0)^{n\alpha}$, где $\alpha \in (k-1; k]$, $k \in \mathbb{N}$, $x \geqslant x_0$,
называется \emph{дробным степенным рядом} с центром в точке x_0. Свойства дроб-
ных степенных рядов см. в [8]. Далее обозначим $D^{\alpha} := {_{0}^{C}D_{x}^{\alpha}}$.
Рассмотрим задачу Коши: \begin{equation*} D^{2\alpha} u + \frac{a}{x^{\alpha}} D^{\alpha}
u + s(x) g(u) = h(x), \quad x > 0, \quad a > 0, \quad \alpha \in \left(\frac{1}{2}; 1 \right],
\tag{1} \end{equation*} \begin{equation*} \text{где} \quad g(u) = \sum_{k=0}^{K} a_k
u, \quad K < +\infty; \quad u(0) = \hat{u}_0, \quad D^{\alpha} u \big{|}_{x=0} = 0. \tag
{2} \end{equation*} Положим $s = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n
\quad \text{и} \quad h = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}
Ищем решение задачи в виде дробного степенного ряда: \begin{equation*} u(x) = \sum_{n=0}^{
u_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \tag{3}. \end{equation*} \textbf{Теорема.}
\emph{Если $u_{N}(x)$ — частичные суммы ряда (3), то $u_0 = \hat{u}_0$, $u_1 = 0$,
и рекуррентная формула для нахождения коэффициентов u_N, $N \geqslant 2$, имеет
вид: \newline \begin{equation*} u_N \left(1 + \frac{a\Gamma(1 + (N-2)\alpha)}{\Gamma(1
+ (N-1)\alpha)} \right) = h_{N-2} - D^{(N-2)\alpha} \left(\left(\sum_{n=0}^{N} s_n
\frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \right) \left(\sum_{k=0}^{K} a_k u_{N}(x)

\right) \right) \Bigg{|}_{x=0}. \end{equation*}} \textbf{Следствие~1.} \emph{Если в задаче (1)–(2) $s(x) \equiv s \in \mathbb{R}$, $h \equiv 0$, $g = u(x)$, то она имеет решение \begin{equation*} u(x) = \hat{u}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)s\hat{u}_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(1 + (2k-1)\alpha)}{\Gamma(1 + (2k-1)\alpha) + a \Gamma(1 + 2(k-1)\alpha)} \right) \frac{x^{2n\alpha}}{\Gamma(1+2n\alpha)}, \tag{4} \end{equation*} причем, дробный степенной ряд (4) сходится абсолютно и равномерно при $x \geqslant 0$.} %\begin{wrapfigure}{R}{0.48\textwidth} %\centering{\includegraphics[trim=0 200 0 0,width=\linewidth]{graph1.png}} %\end{wrapfigure} С применением следствия 1 для оператора целочисленного дифференцирования ($\alpha = 1$) при дополнительных условиях $\hat{u}_0 = s = 1$ найдены решения задачи (1)–(2). В частности: $u = J_0(x)$ при $a = 1$; $u = \frac{\sin x}{x}$ при $a = 2$; $u = \frac{2 J_1(x)}{x}$ при $a = 3$; $u = \frac{3 \sin x - 3 x \cos x}{x^3}$ при $a = 4$; $u = \frac{8 J_2(x)}{x^2}$ при $a = 5$. Здесь $J_a(x)$ — функция Бесселя первого рода. Заметим, что в [7] с применением метода дробного дифференциального преобразования (FDT) при $a = 2$ найдено такое же решение. \textbf{Следствие~2.} \emph{Если в задаче (1)–(2) $s(x) = x^{\alpha}$, $g = u^{k}(x)$, где $k \in \mathbb{N}$, и $h = \Gamma(1+2\alpha) + \frac{a\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} + x^{\alpha} (\hat{u}_0 + x^{2\alpha})$, то она имеет решение $u(x) = \hat{u}_0 + x^{2\alpha}$.}

\textbf{Литература.} 1.~Podlubny~ Fractional Differential Equations // Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, New York, 1999. 2.~Das~S. Functional Fractional Calculus // Springer-Verlag, Berlin, 2011. 3.~Учайкин~В.В. Метод дробных производных // Издательство «Артишок», Ульяновск, 2008. 4.~Kilbas~A.A., Srivastava~H.M., Trujillo~J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations // Elsevier, Amsterdam, 2006. 5.~Wang~H.H., Hu~Y. Solutions of fractional Emden-Fowler equations by homotopy analysis method // Journal of Advances in Mathematics, vol. 13(1), P.~1–6, 2017. 6.~Chandrasekhar~S. Introduction to the Study of Stellar Structure // Dover Publications, New York, 1967. 7.~Rebenda~J., \v{S}marda~Z. A Numerical Approach for Solving of Fractional Emden-Fowler Type Equations // International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2017), AIP Conference Proceedings, vol. 1978, 2018. 8.~El-Ajou~A., Abu Arqub~O., Al Zhour~Z., Momani~S. New results on fractional power series: theories and applications // Entropy, vol. 15, P.~5305–5323, 2013. 9.~Syam~M.I. Analytical Solution of the Fractional Initial Emden-Fowler Equation Using the Fractional Residual Power Series Method // International Journal of Applied and Computational Mathematics, vol. 4, Article number: 106, P.~1–8, 2018.