Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Формальные асимптотические разложения решений алгебраических q-разностных уравнений, содержащие логарифмы

Гаянов Никита Владимирович
Студент (бакалавр)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова, Москва, Россия
E-mail: nikitaminecraft@gmail.com

Работа выполнена под руководством Парусниковой Анастасии Владимировны.

Рассматривается алгебраическое q-разностное уравнение, т. е. уравнение вида

$$P(z, f(z), f(qz), \dots, f(q^n z)) = 0, P \in \mathbb{C}[x, y_0 \dots, y_n], q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}. \tag{1}$$

Ищем его формальные решения в виде степеннно-логарифмического ряда (ряда Дюлака) вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\log_q x) x^k, \tag{2}$$

где P_k – многочлены.

Получена следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть имеется уравнение вида*

$$L(\sigma) y_0 = x M(x, \log_q x, y_0, y_1, \dots, y_n), \tag{3}$$

где $L(\sigma) = \sum_{j=0}^{n} a_j (\sigma)^j$, M *– многочлен от* $n+3$ *переменных,* $|q| \neq 1$ *и выполняется одно из условий:*

1) $|q| < 1$ *и все корни* $L(z)$ *лежат в* $\{z : |z| > |q|\}$*;*
2) $|q| > 1$ *и все корни* $L(z)$ *лежат строго внутри круга* $\{z : |z| < |q|\}$.

Тогда у уравнения (3) существует единственное решение в виде ряда Дюлака (2).

Метод доказательства аналогичен методу, изложенному в [1] для нахождения степенно-логарифмических разложений алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений.

Поиск данных решений методами степенной геометрии сводится к задаче о нахождении решений автономных алгебраических разностных уравнений в многочленах. На основе [2-3] делается вывод о максимальной степени многочлена.

Источники и литература

1) Р. Р. Гонцов и И. В. Горючкина, «О сходимости формальных рядов Дюлака, удовлетворяющих алгебраическому ОДУ», Математический сборник, т. 210, No 9, с. 3—18, 2019.
2) R. Feng, X.-S. Gao и Z. Huang, «Rational solutions of ordinary difference equations», Journal of Symbolic Computation, vol. 43, No 10, p. 746—763, 2008. 14
3) O. Shkaravska и M. van Eekelen, «Univariate polynomial solutions of algebraic difference equations», Journal of Symbolic Computation, vol. 60, p. 15—28, 2014.