Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Достаточные условия отсутствия эквивариантно простых ростков при действии циклических групп

Завадский Константин Геннадьевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории динамических систем, Москва,
Россия
E-mail: zavadskiy_fox@mail.ru

Пусть группа G действует на множестве $M \times N$. Отображение $f\colon M \to N$ называется *эквивариантным* относительно действия группы G (далее будем говорить: отображение f эквивариантно), если для любого $\sigma \in G$ и для любого $x \in M$ выполняется соотношение $f(\sigma \cdot x) = \sigma f(x)$.

Два эквивариантных отображения $f, g\colon M \to N$ называются *эквивариантно правоэквивалентными* относительно действия группы G, если существует эквивариантный диффеоморфизм $\Phi\colon M \to M$ такой, что выполняется условие $g = f \circ \Phi$.

Эквивариантное отображение $f\colon M \to N$ называется *эквивариантно простым* относительно действия группы G (далее будем говорить: отображение f эквивариантно простое), если для всех достаточно больших $r \in \mathbb{N}$ достаточно малая окрестность некоторой точки его орбиты в пространстве r-струй эквивариантных отображений $M \to N$ пересекается лишь с конечным числом других орбит и число примыкающих орбит в пространстве r-струй эквивариантных отображений $M \to N$ ограничено при $r \to \infty$.

Существует общая задача классификации ростков голоморфных функций, эквивариантно простых относительно всевозможных действий конечных абелевых групп на прообразе и образе. Частные случаи этой задачи рассматриваются в работах [1]-[4]. В данной работе уточняются достаточные условия отсутствия эквивариантно простых ростков теоремы 16 из статьи [3].

В статье [3] рассматривается действие группы $\mathbb{Z}_m$ ($m \in \mathbb{N}$) на множестве $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, ($n \in \mathbb{N}$), которое задаётся формулой

$$\sigma * (z_1, \ldots, z_n; w) = (\tau^{p_1} z_1, \ldots, \tau^{p_n} z_n; \tau^q w), \tag{1}$$

где $\tau = \exp(\frac{2\pi i}{m})$, σ – образующая группы $\mathbb{Z}_m$, $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}$, для $b \in \{1, \ldots n\}$ $p_b \in \{1, \ldots, m\}$, $q \in \{1, \ldots, m\}$.

Обозначим через $j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG}$ пространства r-квазиструй ($r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$) с весами $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ростков всех эквивариантных голоморфных функций $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Через d_r^α обозначим размерность факторпространства $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^\alpha \mathcal{O}_n^{GG})$ над $\mathbb{C}$. Через D_r^α обозначим размерность прообраза нетривиального действия группы ростков всех эквивариантных биголоморфных отображений $\Phi\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ на $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^\alpha \mathcal{O}_n^{GG})$. Теорема 16 из статьи [3] предлагает достаточное условие отсутствия эквивариантно простых ростков в терминах d_r^α и D_r^α. В данной работе для случая $n = 2$ эти условия переписываются в терминах p_1, p_2, q, m. В частности, имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Если группа $\mathbb{Z}_m$ ($m \in \mathbb{N}$) действует на множестве $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ по формуле (1), и выполняются следующие условия:*

$$p_1 = p_2, \quad q + \eta m \geqslant 5\,\mathrm{HOK}(p_1, p_2), \quad Q(q + \eta m \bmod \mathrm{HOK}(p_1, p_2)) = 0,$$

где $Q(x) = \#\{(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2_{\geqslant 0}\colon p_1 j_1 + p_2 j_2 = x\}$, $\eta = \min\{t \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} : Q(q + tm) \neq 0\}$, то не существует эквивариантно простых ростков голоморфных функций $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$.

Источники и литература

1) В.И.Арнольд. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности // Функциональный анализ и его приложения, Том 6, Выпуск 4. 1972. С. 3-25.
2) В.И.Арнольд. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют // Успехи математических наук, Том 33, Выпуск 5. 1978. С. 91-107.
3) E.A.Astashov. Equivariant simple singularities and admissible sets of weights // WSEAS Transactions on Mathematics 17, 2018, pp. 404-410.
4) W. Domitrz, M. Manoel, P. de M. Rios. The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions // Journal of Geometry and Physics 71, 2013, pp. 58–72.