Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Обоснование точной асимптотики фундаментального решения для вырождающегося параболического уравнения с малым параметром

Рахель Марк Анатольевич
Аспирант
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова, Москва, Россия
E-mail: marakhel@edu.hse.ru

В работе рассматривается задача о построении асимптотики фундаментального решения задачи Коши для вырождающегося параболического уравнения с малым параметром (Частным случаем этого уравнения является уравнение, описывающее процесс Орнстейна-Уленбека [1]):

$$\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 a^2(x) \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial x} \right) + b(x)\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial x} = 0, \quad G_\varepsilon|_{t=0} = \delta(x-\xi). \tag{1}$$

В [2] была представлена и доказана формула, выражающая дельта-функцию Дирака в виде действия функции от оператора рождения на гауссову экспоненту:

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \lim_{\beta\to 1-0} e^{-\frac{\beta(x-a^+)^2}{2\varepsilon}} e^{-\frac{\zeta^2}{\varepsilon}}\Big|_{\zeta=0}, \tag{2}$$

где $a^+ = \zeta - \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial\zeta}$, а предел понимается в слабом смысле.

Асимптотика строится следующим образом. Рассмотрим задачу для нахождения фундаментального решения параболического уравнения

$$\big[-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t} + H\big(x, -\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\big)\big]G = 0, \quad G|_{t=0} = \delta(x-\xi). \tag{3}$$

Определим *символ фундаментального решения* как решение задачи Коши

$$\big[-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t} + H\big(x, -\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\big)\big]V = 0, \quad V|_{t=0} = e^{-\frac{(x-\xi-y)^2}{2\varepsilon}}. \tag{4}$$

Тогда из (2) следует, что если мы знаем решение задачи (4) - функцию $V(x, \xi+y, t)$, то

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} V(x, \xi + a^+, t) e^{-\frac{\zeta^2}{\varepsilon}}\Big|_{\zeta=0}. \tag{5}$$

Символ находится с помощью неосциллирующего метода ВКБ, то есть как асимптотические приближения $V_N(x, \xi+y, t)$:

$$V_N = e^{-\frac{\Phi}{\varepsilon}}(\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + ... + O(\varepsilon^N)). \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5) и используя метод ВКБ, можно получить следующее представление для функции $G(x, \xi, t)$:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}(\hat{y}^2/2 - \Phi(x,\xi+\hat{y},t))}}{\sqrt{1-\Phi''_{yy}}} \left(\hat{\psi}_0(x,\xi,t) + \varepsilon\hat{\psi}_1(x,\xi,t) + \dots\right). \tag{7}$$

Для обоснования асимптотики фундаментального решения доказывается сходимость формального ряда, представляющего амплитуду $\psi(x,t,\varepsilon) = \psi + \varepsilon\psi_1 + \dots$. Делается это следующим образом.

Пусть $G_0(x,\xi,t,\varepsilon)$ - главное слагаемое формального асимптотического решения при построении фундаментального решения $G_\varepsilon(x,\xi,t)$, и L_ε - оператор в левой части (1). Тогда, по построению, $G_0(x,\xi,t,\varepsilon)$ есть решение задачи

$$L_\varepsilon G_0 = -\varepsilon G_0 F, \quad G_0|_{t=0} = \delta(x-\xi), \tag{8}$$

где F - ограниченная при $t \in [0,T]$ по (x,ξ) (при условии равномерной ограниченности $a(x)$ вместе с производными) функция, $G_0(x,\xi,t,\varepsilon) = exp(-S(x,\xi,t)/\varepsilon)\psi(x,t,\xi)$.

Равенство (8) позволяет с помощью формулы Дюамеля написать формальный ряд для фундаментального решения в виде

$$G_{as} = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k G_k(x,\xi,t,\varepsilon), \tag{9}$$

где

$$G_k(x,\xi,t,\varepsilon) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x,y,t-\tau,\varepsilon) L_\varepsilon F_{k-1}(y,\xi,\tau,\varepsilon) dy d\tau, \tag{10}$$

а F_{k-1} - правая часть уравнения $L_\varepsilon(G_0 + \varepsilon G_1 + ... + \varepsilon^{k-1}G_{k-1}) = -\varepsilon^k F_{k-1}$.

Сходимость ряда (9) следует из оценки для G_k. Для этого используется ограниченность отношения правой части (8) и G_0 и симметричность G_0 по x,ξ, что позволяет использовать подобные рассуждения и в других ситуациях.

Источники и литература

1) Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications, John Wiley & Sons, Inc.; 2nd edition, 1971.
2) A Representation of the Delta Function via Creation Operators and Gaussian Exponentials, and Multiplicative Fundamental Solution Asymptotics for Some Parabolic Pseudodifferential Equations, Russian Journal of Mathematical Physics, 3:1 (1995), 25-40.