Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Построение инвариантных многогранников Ляпунова

Мусаева Асият Магомедовна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: asya.musaeva2001@mail.ru

Линейные динамические системы имеют вид $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$, где $\boldsymbol{x} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ – гладкая функция, а матрица $A(t)$ принимает произвольные значения из заданного компактного множества $\mathcal{A}$. Таким образом, система с переключениями – это управляемая линейная динамическая система с компактным *множеством управления* $\mathcal{A}$. Подобные системы возникают в задачах электроники, механики, робототехники, планирования, и т.д. [2]. Один из главных вопросов – максимальный рост траекторий системы и её устойчивость. *Показателем Ляпунова* $\sigma(\mathcal{A})$ системы называется инфимум чисел α, для которых $\|\boldsymbol{x}(t)\| \le C\, e^{\alpha t}\|\boldsymbol{x}_0\|, \quad t \in [0, +\infty)$. Таким образом, самый быстрый рост траектории имеет порядок $C\, e^{\sigma t}, t \to \infty$. Система называется *асимптотически устойчивой*, если все её траектории стремятся к нулю при $t \to \infty$. Известно [3], что система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда $\sigma < 0$. Наиболее точную информацию о максимальном росте траекторий дает *инвариантная норма Ляпунова*, которая определяется следующим свойством: $\|\boldsymbol{x}(t)\| \le e^{\sigma t}\|\boldsymbol{x}_0\|$ для любой траектории $\boldsymbol{x}(t)$, и при этом для любой точки $\boldsymbol{x}_0$ существует траектория $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ такая, что $\tilde{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{x}_0$ и $\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\| = e^{\sigma t}\|\boldsymbol{x}_0\|$. Н.Барабанов [1] доказал, что для любой неприводимой системы с выпуклым множеством управления $\mathcal{A}$ инвариантная норма Ляпунова существует. Мы исследуем системы, инвариантные нормы которых задаются многогранниками. Будет доказано, что любой многогранник определяет инвариантную норму некоторой динамической системы. Будут охарактеризованы планарные системы (n=2), имеющие инвариантные многоугольники. Мы также исследуем единственность и сравним полученный результат с дискретными системами [4].

Источники и литература

1) N.E. Barabanov, *Absolute characteristic exponent of a class of linear nonstationary systems of differential equations*, Siberian Math. J. 29 (1988), 521–530.
2) D. Liberzon, *Switching in systems and control*, Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.
3) A. P. Molchanov and Y. S. Pyatnitskiy, *Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory*, Systems Control Lett., 13 (1989), no 1, 59–64.
4) V.Yu. Protasov, *The Barabanov norm is generically unique, simple, and easily computed*, SIAM J. Optimiz. Control. (2022), Society for Industrial and Applied Mathematics Vol. 60, No. 4, pp. 2246–2267