Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Асимптотика решений уравнений на сетках в дискретном времени

Михайлова Светлана Олеговна
Студент (бакалавр)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова, Москва, Россия
E-mail: valsvetmih@yandex.ru

В работе рассматривается задача, имеющая природу случайных блужданий на решётке с дискретным временем. Строится асимптотическое решение (с обоснованием точности) неосциллирующим методом ВКБ.

Задача описывается разностными уравнениями вида:

$$U_i^{n+1} = a_{i,i-k}U_{i-k}^n + \ldots + a_{i,i+m}U_{i+m}^n, \tag{1}$$

где U_k^n – вероятность нахождения частицы в точке x_k на n шаге блуждания, $a_{i,j}$ — вероятность перехода из состояния i в состояние j. Функцию дискретного аргумента U_i^n мы заменяем на функцию $U\big(x,t\big)$, а уравнение на решётке заменяем на псевдодифференциальное уравнение:

$$e^{\tau\frac{\partial}{\partial t}}U = \left(\sum_{j=-k}^{m} a_j(x)e^{jh\frac{\partial}{\partial x}}\right)U, \tag{2}$$

где $e^{kh\frac{\partial}{\partial x}}(f) = f(x+kh)$ – оператор сдвига. Предполагаем, что $a_j\,(ih) = a_{i,j}, U(ih,0) = U_i^0$.

Сведение (2) к (1), имеющему вероятностный смысл, делается так:

$$U_j^n = \int\limits_{\mathbb{R}^1} U(x,n\tau)\Pi_j(x)dx, \tag{3}$$

где $U(x,t)$ – решение задачи Коши для (2), а $\Pi_j = \begin{cases} 0, & x < j-\frac{h}{2}, j+\frac{h}{2} \leqslant x; \\ 1, & j-\frac{h}{2} \leqslant x < j+\frac{h}{2}. \end{cases}$

Решение задачи Коши для (2) находится по формуле:

$$U(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} G(x,\xi,t)U(x,\xi,0)d\xi, \tag{4}$$

где $G(x,\xi,t)$ – фундаментальное решение уравнения (2), то есть решение задачи Коши при $G|_{t=0} = \delta(x-\xi)$.

Далее находится асимптотика фундаментального решения $G(x,\xi,t)$ псевдодифференциального уравнения (2) с помощью метода ВКБ.

Теорема 1. *Обозначим* $W_i^n = e^{(\frac{S}{h})_i^n}(U-U_{as})_i^n$. *Пусть* $S(x,t) \in C^\infty, S_{xx} > 0$ *при* $t \in [0,T]$ *и* $F_i^n = O(h^2)e^{-S/h}$, *тогда справедлива следующая оценка:*

$$\max_i |W_i^{n+1}| \leq |e^{\frac{t}{2}\max\limits_x(S_{tt}-S_{xx})}e^{\max\limits_x \frac{S''_{xx}}{2e^{-S'_t}}\sum_{j=-k}^{m}(1-j^2)a_je^{-jS'_x}}(\max_i |W_i^0| + O(h))$$

Источники и литература

1) Danilov V. G. Nonsmooth Nonoscillating Exponential-type Asymptotics for Linear Parabolic PDE. SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2017. Vol. 49. No. 5. P. 3550-3572.