Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О значениях топологической энтропии одной системы линейных дифференциальных уравнений

Научный руководитель – Ветохин Александр Николаевич

Коновалов Даниил Михайлович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: daniilkonovalov103@gmail.com

В работе [1] построено такое семейство линейных систем, зависящих от вещественного параметра, что показатели Ляпунова постоянны и различны, а топологическая энтропия его систем является линейной функцией. Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty), \tag{1}$$

с кусочно-непрерывным оператором $A\colon \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$. Наделим пространство $\mathbb{R}^n$ нормой $\|x\| = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$ и семейством метрик

$$d_t^A(x_0, y_0) = \max_{\tau\in[0,t]} \|x(\tau, x_0) - x(\tau, y_0)\|, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $x(\cdot, a)$ есть решение системы (1), удовлетворяющее условию $x(0, a) = a$. За $S_{\|\cdot\|}(A, \mathcal{K}, \varepsilon, t)$ обозначим *ε-ёмкость* компактного метрического пространства $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ с метрикой d_t^A (минимальное число открытых шаров радиуса $\varepsilon gt; 0$, покрывающих $\mathcal{K}$). Тогда *топологическая энтропия* [1] системы (1) определяется следующей формулой

$$h_{\mathrm{top}}(A) = \sup_{\mathcal{K}\subset\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln S_{\|\cdot\|}(A, \mathcal{K}, \varepsilon, t) \tag{2}$$

(её правая часть не зависит от выбора нормы $\|\cdot\|$, поэтому определение корректно). В [2] показано, что для показателей Ляпунова $\lambda_1(A) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(A)$ любой системы (1) с ограниченным оператором A, равенство

$$h_{\mathrm{top}}(A) = \sum_{\lambda_i(A) gt; 0} \lambda_i(A)$$

сохраняется. Но на самом деле оно может нарушаться. В работе [3] построена двумерная система (1) с положительными показателями Ляпунова такая, что выполнены соотношения

$$h_{\mathrm{top}}(A) = \max\{\lambda_1(A), \lambda_2(A)\} < \lambda_1(A) + \lambda_2(A).$$

Возникает естественный вопрос: существует ли система (1) такая, что

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i(A) < h_{\mathrm{top}}(A) < \sum_{\lambda_i(A) gt; 0} \lambda_i(A).$$

Для некоторой постоянной c? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема

Theorem. *Для $n = 2$ и каждого $c \in [1,\, 2]$ для системы (1) с матричной функцией*

$$A(t) = \mathrm{diag}(a(t), b(t)), \qquad \textit{where } (a(t), b(t)) = \begin{cases} (1,0), t \in [0,\, 1]; \\ (1,0), t \in [(2n)!,\, (2n+1)!]; \\ (0,1), t \in [((2n-1)!,\, (2n)! + a_n], \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $a_n = \frac{\alpha(2n)!}{1-\alpha}$, $\alpha \in [0, 1)$ *выполнены равенства*

$$\max\{\lambda_1(A), \lambda_2(A)\} = 1, \quad h_{\mathrm{top}}(A) = c, \quad \sum_{\lambda_i(A) gt;0} \lambda_i(A) = 2.$$

Источники и литература

1) Bowen R. *Topological entropy for noncompact sets.* Trans. Amer. Math. Soc. **184** (1973), 125–136.

2) Tien L.H., Nhien L.D. *On the topological entropy of nonautonomous differential equations.* J. of Appl. Math. Phys. **7** (2019), 418–429.

3 Vetokhin A. N. Exact Baire class of the local entropy considered as a function of a point in the phase space.