Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Явный вид фундаментального решения уравнения Колмогорова-Феллера для обобщенного процесса Орнштейна-Уленбека

Крутов Николай Андреевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: kru.tov@outlook.com

Рассматривается обобщенный случайный процесс Орнштейна-Уленбека со скачкообразной диффузией, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dX_s = (B - \beta X_s)ds + \sigma dW_s + \lambda d\Gamma_s, \quad X_0 = x_0, \tag{1}$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$, $0 \le s \le T$, W_s - винеровский процесс, Γ_s - чисто разрывный (скачкообразный) случайный процесс со скачками, заданными независимой случайной величиной, $\beta \ge 0$ - константа, характеризующая скорость возврата к среднему, $\lambda \ge 0$ - константа, характеризующая интенсивность скачков, $B \ge 0, \sigma \ge 0$ - константы. Для скачков будем рассматривать частный случай распределения Лапласа: ядро процесса Γ_s вида $p(z) = \frac{k}{2}\mathrm{e}^{-k|z|}, k > 0$.

Уравнение Колмогорова-Феллера для функции плотности распределения $P(t,x)$ исходного процесса имеет вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}P(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}((B - \beta x)P(t,x)) - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(t,x) - \\ -\lambda\Big(\frac{1}{2}k\int_{-\infty}^{\infty}P(t,x-z)\mathrm{e}^{-k|z|}dz - P(t,x)\Big) = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Обозначим за $\mathcal{E}(t,x,y)$ фундаментальное решение уравнения Колмогорова-Феллера с начальной плотностью $P|_{t=0} = \delta(x-y)$. Если известно $\mathcal{E}(t,x,y)$, то с помощью операции свертки можно найти решение задачи Коши для уравнения (2) с любыми начальными данными.

Переходную плотность вероятности для случая $\lambda = 0$ можно найти в [2], для процессов со скачкообразной диффузией в работах [1], [3] при некоторых соотношениях детерминированного члена и свойств ядра чисто разрывного процесса строится явное решение стационарного уравнения Колмогорова-Феллера. В настоящей работе показано, что при наличии определённого соотношения между интенсивностью скачков и скоростью возврата фундаментальное решение уравнения Колмогорова-Феллера может быть найдено в явном виде:

Теорема 1. *Пусть*

$$\lambda = 2n\beta, \ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда фундаментальное решение $\mathcal{E}(t,x,y)$ уравнения (2) может быть найдено с помощью явной формулы:

$$\mathcal{E}(t,x') = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j k^{n-2j} D_{x'}^{(2j)}[F_n(t,w)](t,x')\mathrm{e}^{-2\beta t j},$$

где $x' = x - y\mathrm{e}^{-\beta t}$,

$$F_n(t,w) = \frac{\exp\left(A_1 iw + A_2 w^2\right)}{(k^2+w^2)^n}, \quad A_1 = -\frac{B}{\beta}(1-\mathrm{e}^{-\beta t}), \quad A_2 = -\frac{\sigma^2}{4\beta}(1-\mathrm{e}^{-2\beta t}),$$

$[F]$ *обозначает обратное преобразование Фурье.*

$[F_n(t,w)](x')$ *могут быть найдены как решения некоторых линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.*

Источники и литература

1) S. Denisov, W.Horsthemke, P. H¨anggi. Generalized Fokker-Planck equation: Derivation and exact solutions // Eur. Phys. J. B 68, 567–575, 2009.
2) C. Gardiner. Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences. Springer, 2009.
3) O.V. Rudenko, A.A. Dubkov, S. N. Gurbatov. On exact solutions to the Kolmogorov–Feller equation // Doklady Mathematics, 94(1) 476-479, 2016.