Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

# Об одном уравнении Риккати

**Научный руководитель – Асташова Ирина Викторовна**

***Никишов Владимир Андреевич***
*Студент (специалист)*
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
*E-mail: nikishov1999@yandex.ru*

Рассматривается уравнение

$$y' = (y - \alpha_1(x))(y - \alpha_2(x)), \tag{1}$$

где $\alpha_1$, $\alpha_2 \in C^1(\mathbb{R})$, - ограниченные функции, $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что решение $y$ определено на промежутке $\Delta$, если $y$ определено в каждой точке промежутка $\Delta$

**Лемма 1.** ([1], Лемма 4.1) Если $x_0 < \omega \leq +\infty$ и существует решение (1), определенное на $(\delta, \omega)$ для некоторого $\delta < \omega$, то существуют такие $S_* \in [x_0, \omega)$ и решение $y_*$ уравнения (1), определенное на $(S_*, \omega)$, что для любого решения $y$ уравнения (1), определенного на $(S, \omega)$, где $S \geq x_0$, выполнены соотношения $S \geq S_*$, $y \leq y_*$. Решение $y_*(x)$ будем называть **главным решением** на $(x_0, \omega)$.

**Теорема 1.** Если решения $y_3 < y_2 < y_1$ уравнения (1) определены в точке $x_0$, а решение $y_1$ определено на $[x_0, +\infty)$, то решения $y_3, y_2$ продолжаются на тот же промежуток, причём на нём функция $\frac{y_1(x)-y_3(x)}{y_1(x)-y_2(x)} \geq 1$ убывает и имеет при $x \to +\infty$ конечный предел, который в случае, когда $y_1$ — главное решение на $(x_0, +\infty)$, равен 1.

**Теорема 2.** Если решения $y_2 < y_1$ уравнения (1) определены на $[x_0, +\infty)$ и имеют разные конечные пределы при $x \to +\infty$, то $y_1$ — главное решение на $(x_0, +\infty)$, и всякое решение $y$, определённое на $[x_0, +\infty)$, и отличное от $y_1$, имеет при $x \to +\infty$ тот же предел, что и $y_2$.

**Теорема 3.** Если решения $y_2 < y_1$ уравнения (1) определены на $[x_0, +\infty)$ и имеют конечные (возможно, совпадающие) пределы при $x \to +\infty$, то любое решение $y$ со значением $y(x_0) \leq y_1(x_0)$ продолжается на $[x_0, +\infty)$ имеет при $x \to +\infty$ тот же предел, что и $y_2$.

**Пример 1.** Уравнение

$$y' = y(y - 1) \tag{2}$$

имеет решения $y_1 = 1$ и $y_2 = 0$, причем $y_1$ — главное на $(0, +\infty)$. Если $y(0) < 1$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

**Пример 2.** Пусть $\alpha_2(x) = 16(x-n)^2(x-n-1)^2+1$, $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}_0$. Рассмотрим уравнение

$$y' = y(y - \alpha_2(x)), \tag{3}$$

Если $y(0) \leq 0$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$. Но у (3) есть периодическое решение, отличное от константы.

## Источники и литература

1) Hartman P., *On an ordinary differential equation envolving a convex function*, Transactions of the American Mathematical Society **146** (1969), 179—202.