Интегрируемые системы с магнитным полем на многообразиях вращения

Кобцев Иван Федорович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: int396.kobtsev@mail.ru

Дано двумерное многообразие $M \cong S^2$ с S^1-инвариантной римановой метрикой. Определим на T^*M *магнитный геодезический поток* как гамильтонову систему с гамильтонианом H стандартного геодезического потока и симплектической структурой ω, которые в локальных полугеодезических координатах (r, φ) имеют вид

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)}, \quad \omega = dp_r \wedge dr + dp_\varphi \wedge d\varphi + \beta. \tag{1}$$

Здесь β — гладкая S^1-инвариантная 2-форма на M, задающая магнитное поле (поэтому $\omega = d(pdq) + \pi^*\beta$ — гладкая симплектическая форма на T^*M, $\pi : T^*M \to M$ — каноническая проекция, (q, p) — канонические координаты на T^*M), $f : (0, L) \to \mathbb{R}_{>0}$, $\Lambda : [0, L] \to \mathbb{R}$ — гладкие функции, $\beta = \Lambda'(r)dr \wedge d\varphi$, L — длина геодезической, соединяющей полюса сферы (неподвижные точки S^1-действия).

Предположим, что выполнены следующие условия на функции $f(r)$ и $\Lambda(r)$ [1,2]:

1) $f : (0, L) \to \mathbb{R}_{>0}$ продолжается до гладкой нечетной $2L$-периодической функции Морса $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f'(0) = 1$, $f'(L) = -1$;
2) $\Lambda : (0, L) \to \mathbb{R}$ продолжается до гладкой четной $2L$-периодической функции Морса $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
3) $(\Lambda'(r))^2 + (f'(r))^2 > 0$;
4) кривизна плоской кривой $(f(r), \Lambda(r))$ имеет лишь простые нули.

Тогда H и ω являются гладкими на T^*M.

Утверждение 1. *Определенная таким образом система имеет две степени свободы и является вполне интегрируемой по Лиувиллю; дополнительным интегралом является* $K = p_\varphi + \Lambda(r)$.

Фазовое пространство этой системы расслаивается на инвариантные (относительно фазового потока системы) двумерные слои, являющиеся совместными поверхностями уровня интегралов $H = h$, $K = k$, т.е. корректно определено слоение, называемое слоением Лиувилля. Согласно теореме Лиувилля, это слоение состоит из слоев двух типов: регулярных (диффеоморфных несвязному объединению торов T^2, называемых торами Лиувилля) и особых (при переходе через них интегральные поверхности претерпевают бифуркации).

Теория интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы построена в [3]. Ниже сформулируем несколько основных понятий этой теории.

Определение 1. *Атом (атом-бифуркация) — это расслоенная окрестность особого слоя слоения Лиувилля в неособом компактном изоэнергетическом многообразии* $Q_h^3 = \{H = h\}$ *таком, что* $dH\big|_{Q_h^3} \neq 0$.

Определение 2. *Молекула интегрируемой системы (грубый инвариант Фоменко) на неособом компактном* Q_h^3 *— это база слоения Лиувилля на* Q_h^3*; граф с обозначением атомов в его вершинах.*

Определение 3. *Меченая молекула (тонкий инвариант Фоменко–Цишанга) — это грубый инвариант Фоменко с метками на ребрах; виды этих меток и правила их вычисления приведены в [3].*

Анализ топологических свойств слоения Лиувилля (т.е. лагранжева слоения с особенностями) этой задачи включает в себя следующие части:

- построение бифуркационных диаграмм;
- описание особенностей рангов 0 и 1;
- исследование топологии бифуркаций торов Лиувилля на неособом изоэнергетическом многообразии Q^3_h;
- вычисление инвариантов Фоменко и Фоменко–Цишанга.

В рассмотренном случае (движения по сфере) описаны все особые точки (как невырожденные, так и вырожденные). Показано, если функция $\Lambda(r)$ не монотонна на $(0, L)$, то в фазовом пространстве возникает (вырожденная) особенность типа «эллиптическая вилка», не связанная с какой-либо симметрией системы. Также установлен класс меченых молекул, реализуемых системой на сфере, указаны все возможные бифуркации торов Лиувилля и описаны все возможные бифуркационные диаграммы, реализуемые системами на сфере.

Комментарий. *Любой критической точке функции* Λ*, кроме* 0 *и* L*, отвечает несимметричная эллиптическая вилка. Для этого достаточно выполнения условий 1)-3), указанных выше.*

Приведенная выше схема может применяться и к другим задачам, получаемым из описанной выше.

Так, если рассмотреть факторизацию сферы по антиподальному отображению ξ : $(r, \varphi) \to (L - r, \varphi + \pi)$, то получится проективная плоскость. Определенная таким образом инволюция поднимается на все фазовое пространство T^*M:

$$\xi : (p_r, k, r, \varphi) \to (-p_r, k, L - r, \varphi + \pi).$$

Полученная система называется магнитным геодезическим потоком на проективной плоскости. Чтобы задача была поставлена корректно, потребуем выполнения условия $(\Lambda'(r))^2 + (f'(r))^2 > 0$ всюду, кроме $r = L/2$. В слоении Лиувиилля этой системы появляются бифуркации с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами, реализуется изоэнергетическое многообразие $L(4, 1)$, в фазовом пространстве возникает (вырожденная) особенность типа «удвоение периода».

Рассматриваемый класс поверхностей не ограничивается сферой и проективной плоскостью. Так, чтобы получить магнитный геодезический поток на торе, наложим на функции $f(r)$, $\Lambda(r)$ следующие условия:

1) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}_{>0}$, $\Lambda : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ — гладкие 2π-периодические функции Морса;
2) $(\Lambda'(r))^2 + (f'(r))^2 > 0$;
3) кривизна плоской кривой $(f(r), \Lambda(r))$ имеет лишь простые нули.

В этом случае слоение Лиувилля на неособом изоэнергетическом многообразии Q^3_h является прямым произведением, в меченой молекуле появляется «глобальный цикл», изоэнергетическое многообразие диффеоморфно трехмерному тору T^3.

С учетом проведенных вычислений описан класс инвариантов Фоменко–Цишанга, реализуемых магнитными геодезическими потоками на поверхностях вращения, и даны методы построения интегрируемой системы по заданной изоэнергетической молекуле.

Источники и литература

1) *Кантонистова Е. О.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле. Матем.сб., 2016, том 207, №3, с. 47–92.
2) *Кудрявцева Е. А., Ошемков А. А.* Бифуркации интегрируемых механических систем с магнитным полем на поверхностях вращения. Чебышевский сб., 2020, том 21, №2, с. 244–265.
3) *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.