Секция «Геометрия и топология»

Биллиард на однополостном гиперболоиде, ограниченный эллипсоидом, в поле потенциала Гука

Хотин Николай Аркадьевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: nikhot15@gmail.com

Рассмотрим невырожденную квадрику E из семейства софокусных в пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть D — компактная область на E, ограниченная конечным числом квадрик, софокусных с E, а углы излома на границе этой области равны $\pi/2$. Такие области были классифицированы с точностью до комбинаторной эквивалентности Г. В. Белозеровым в работе [1].

Рассмотрим следующую динамическую систему: внутри D в поле упругой силы движется материальная точка единичной массы, отражаясь от границы этой области абсолютно упруго. Такая система является интегрируемой гамильтоновой системой в кусочно-гладком смысле (подробную информацию об ИГС см. в [2]). Дополнительный первый интеграл F, функционально независимый с энергией системы H, можно найти с помощью метода В. В. Козлова. Отметим, что в 2018 году И. Ф. Кобцев рассмотрел эту задачу на эллипсоиде.

Теорема 1. *В эллиптических координатах первые интегралы рассматриваемой системы имеют следующий общий вид вне зависимости от выбора квадрики E:*

$$H = \frac{2\Delta_1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}p_1^2 + \frac{2\Delta_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}p_2^2 + \frac{2\Delta_3}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}p_3^2 + \\ + \frac{k}{2}(a+b+c-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)),$$

$$F = \frac{2\Delta_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}p_1^2 + \frac{2\Delta_2\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}p_2^2 + \frac{2\Delta_3\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)}p_3^2 - \frac{k}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

где p_i – импульс, соответствующий координате λ_i, k – коэффициент силы упругости, а $\Delta_i = (a-\lambda_i)(b-\lambda_i)(c-\lambda_i)$.

Замечание 1. *При фиксировании квадрики E одна из эллиптических координат становится постоянной, а импульс, соответствующий этой координате, тождественно равен нулю.*

Возьмем в качестве E однополостный гиперболоид. Пусть D — область на E, ограниченная софокусным эллипсоидом. При разделении переменных уравнения движения принимают следующий вид:

$$\dot{\lambda}_i = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\lambda_i-\lambda_j}\sqrt{\frac{(a-\lambda_i)(b-\lambda_i)(c-\lambda_i)}{\lambda_i-\widetilde{\lambda}}\left(\frac{k}{2}\lambda_i^2 + \left(h - \frac{k}{2}(a+b+c-\widetilde{\lambda})\right)\lambda_i - f\right)}.$$

Опираясь на свойства функции, которая стоит в подкоренном выражении, были найдены области возможного движения материальной точки, построены бифуркационные диаграммы для случаев притягивающего и отталкивающего потенциалов и доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Слоения Лиувилля описанного биллиарда на неособых изоэнергетических поверхностях Q^3 принадлежат к одному из трех классов лиувиллевой эквивалентности в случае $k > 0$ и к одному из шести классов в случае $k < 0$, это определяется их инвариантами Фоменко–Цишанга.*

Источники и литература

1) Г. В. Белозеров, Топологическая классификация интегрируемых геодезических биллиардов на квадриках в трехмерном евклидовом пространстве // Матем. сб., **211**:11, 2020, 3–40.

2) А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, — Ижевск: РХД, 1999.